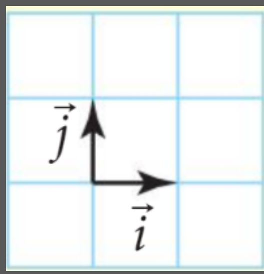
Chapitre 6 Les vecteurs – 2nd partie

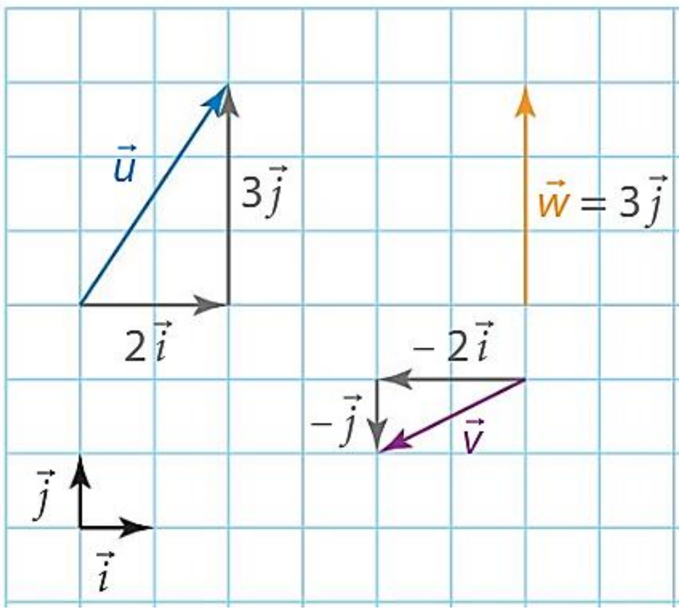
1- Coordonnees d’un vecteur dans une base

C’est quoi une BASE vectorielle ? :

Les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ constituent une base s’ils ont des directions différentes.
Si ces directions sont PERPENDICULAIRES si la norme de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$ est EGALE à 1, on dit que cette base est ORTHONORMEE.



Soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ définis graphiquement ci-contre.



On peut écrire :

-
-
-

On dit que ces vecteurs ont pour coordonnées, dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

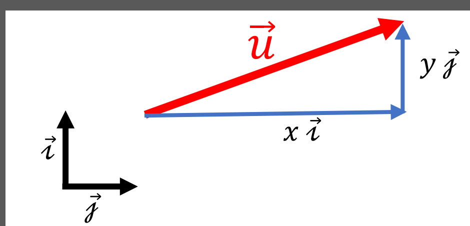
C’est quoi les coordonnées d’un vecteur ? :

Tout vecteur $\vec{u}$ peut s’écrire sous la forme

$$\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$$

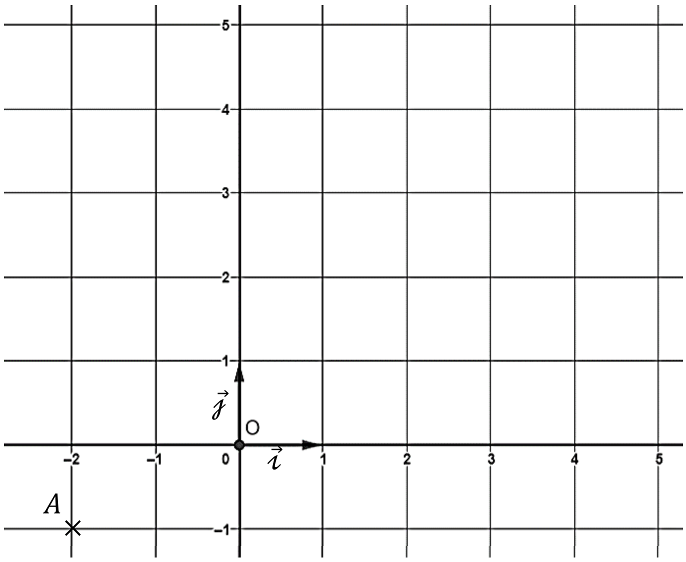
x et y étant des nombres que l’on appelle coordonnées. On écrit :

$$\vec{u}\binom{x}{y}$$



2- OPERATIONS SUR LES VECTEURS EN UTILISANT LEURS COORDONNEES

Exemple : Soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, dont les coordonnées dans un repère ($O,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}$) sont : $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$.



Soit le vecteur $\vec{w}$ défini par :

$$\vec{w} = 2\,\vec{u} + \vec{v}$$

1- Tracer un représentant de $\vec{w}$, d'origine A :

2- Calculer $\vec{w} = 2\,\vec{u} + \vec{v}$ sous forme vectorielle :

-
-
-

3- Calculer $\vec{w} = 2\,\vec{u} + \vec{v}$ en utilisant les coordonnées :

Soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Leurs coordonnées dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$ sont $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. Soit k un nombre quelconque. On aura toujours :

$$\vec{u}+\vec{v} = (x\,\vec{\imath}+y\,\vec{\jmath}) + (x'\,\vec{\imath}+y'\,\vec{\jmath}) = (x+x')\vec{\imath} + (y+y')\vec{\jmath}$$

et $$k\,\vec{u} = k\,(x\,\vec{\imath}+y\,\vec{\jmath}) = k\,x\,\vec{\imath} + k\,y\,\vec{\jmath}$$

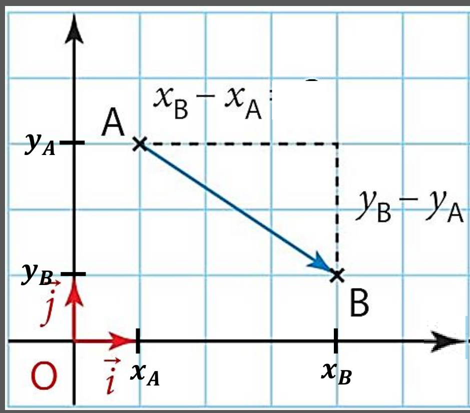
Si on écrit cela « *en notation coordonnées* », cela donne :

$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad k\,\vec{u}\begin{pmatrix}k\ \ x\\k\ \ y\end{pmatrix}$$

3- Coordonnees d’un vecteur defini par 2 points

Soit les points A et B de coordonnées :

$$A(x_A\ ;\ y_A) \qquad \text{et} \qquad B(x_B\ ;\ y_B)$$



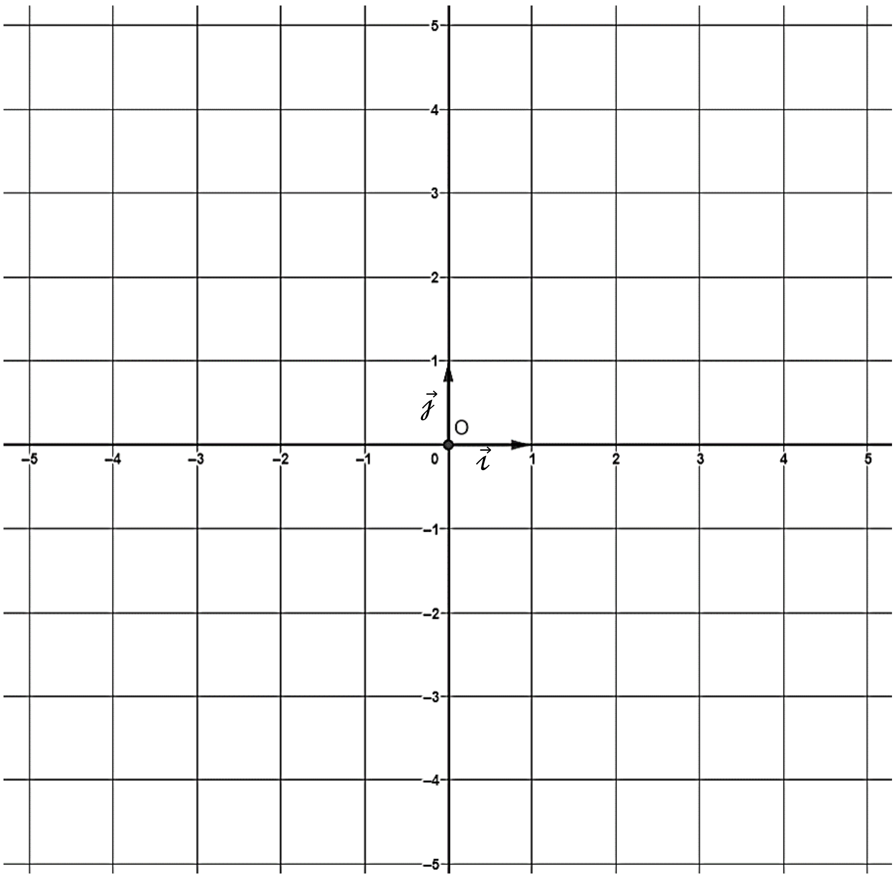
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ peuvent être calculées de la manière suivante :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$\uparrow \qquad \uparrow$$

extrémité – origine

Exemple : Soit les points A et B dont les coordonnées dans un repère ($O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}$) sont $A(4\ ;\ -3)$ et $B(-4\ ;\ 4)$



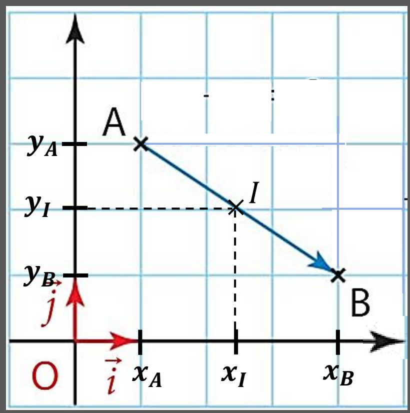
4- COORDONNEES DU POINT MILIEU D'UN SEGMENT

<u>Propriété</u> : Soit les points A et B du plan qui ont les coordonnées suivantes :

$$A(x_A\ ;\ y_A) \qquad \text{et} \qquad B(x_B\ ;\ y_B)$$

Soit I le milieu du segment $[AB]$. Les coordonnées de I peuvent être calculées de la manière suivante :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

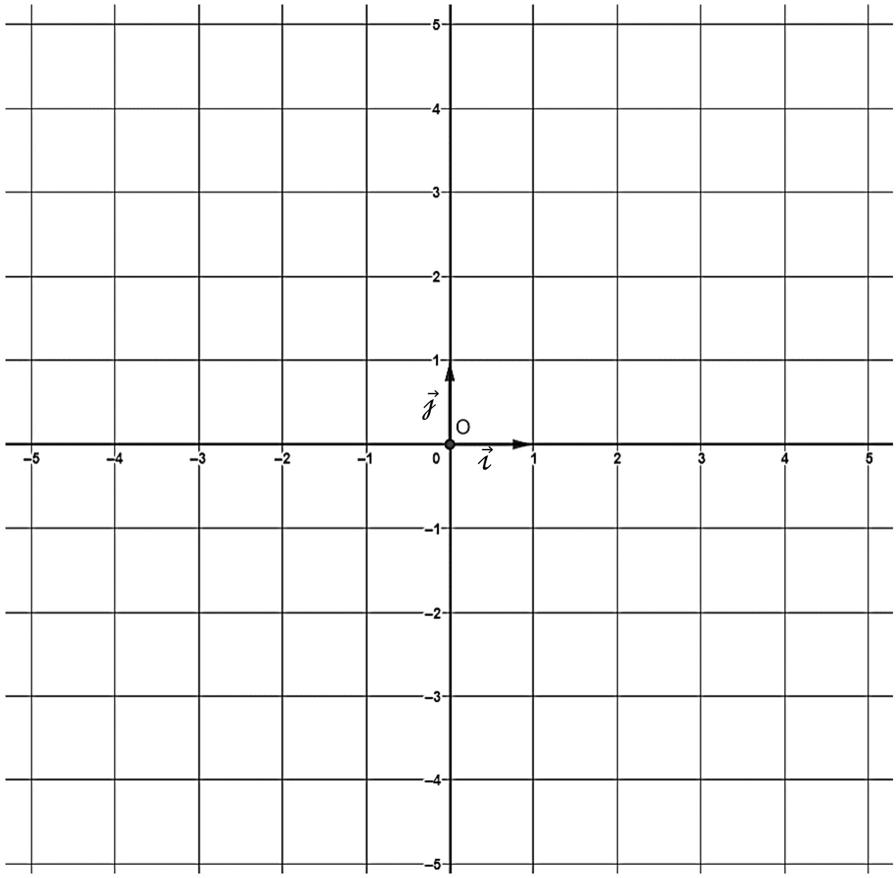


On a alors :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AI}$$

<u>Exemple</u> : Soit les points A , B, C et D dont les coordonnées dans un repère ($O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}$) sont $A(-4\ ;\ -4)$, $B(0\ ;\ 3)$, $C(5\ ;\ 5)$ et $D(1\ ;\ -2)$.

1- Déterminer les coordonnées du milieu I du segment $[AC]$:



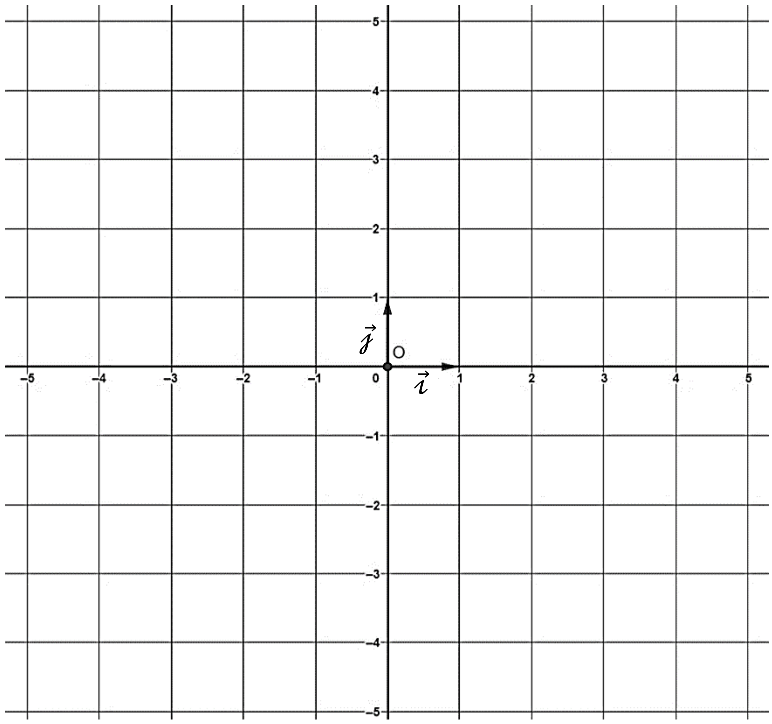
2- Déterminer les coordonnées du milieu J du segment $[BD]$:

3- Que peut-on dire sur la nature du quadrilatère ABCD ?

5- RESOLUTION D'EQUATIONS VECTORIELLES

Exemple : Soit les points A , B et C dont les coordonnées dans un repère ($O,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}$) sont $A(-4\,;\,4)$, $B(4\,;\,3)$ et $C(\,1\,;\,-4)$. Le centre de gravité du triangle ABC est un point nommé généralement G et qui vérifie la relation $\overrightarrow{GA}+\ \overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

1- Tracer le triangle ABC dans le repère ci-contre.



2- On note x et y les coordonnées du point G. On a donc $G(x,y)$. Calculer en fonction de x et y :

   a. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{GA}$:

   b. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{GB}$:

   c. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{GC}$:

3- En déduire les coordonnées du vecteur somme $\overrightarrow{GA}+\ \overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$:

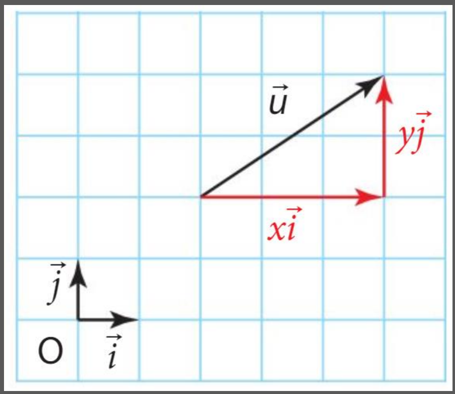
4- Calculer les valeurs des nombres x et y qui permettent d'obtenir : $\overrightarrow{GA}+\ \overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Positionner le point G dans le repère ci-dessus.

6- NORME D'UN VECTEUR

Propriété :

Soit un vecteur $\vec{u}$ dont les coordonnées dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont $\vec{u}\binom{x}{y}$.

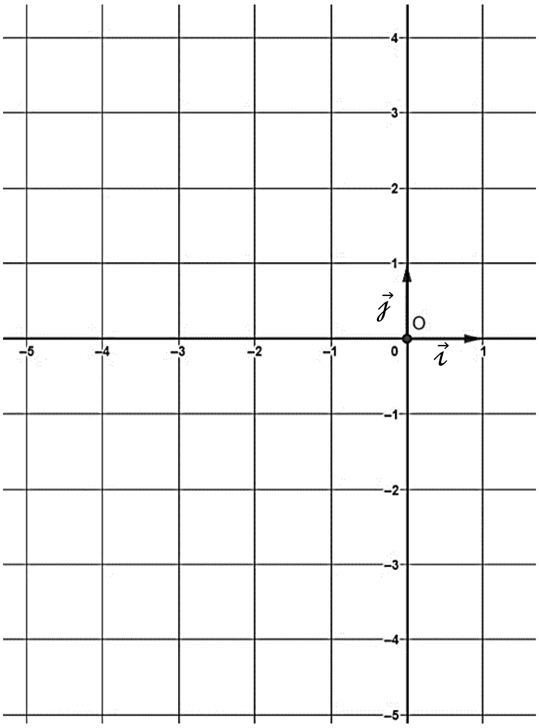
La norme $\|\vec{u}\|$ du vecteur $\vec{u}$ correspond à sa longueur. En appliquant le théorème de Pythagore sur le triangle rectangle ci-contre, on obtient : $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$



On en déduit que :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exemple : Soit les points A , B et C dont les coordonnées dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont $A(-4\,;\,-1)$, $B(0\,;\,-5)$ et $C(1\,;\,4)$



1- Placer les points dans le repère ci-contre.

2- Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$.

3- Montrer que $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{32}$, $\|\overrightarrow{BC}\| = BC = \sqrt{82}$ et $\|\overrightarrow{CA}\| = CA = \sqrt{50}$:

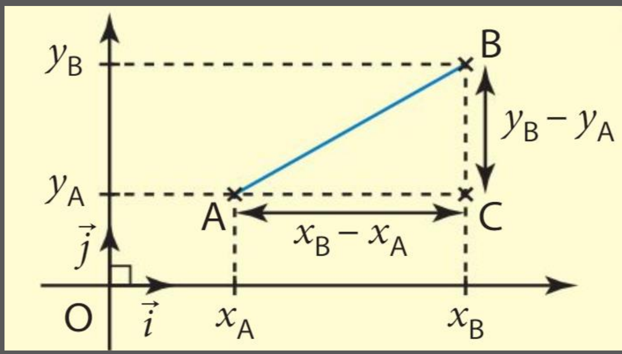
4- En appliquant la réciproque du théorème de Pythagore, montrer que le triangle ABC est rectangle en A :

7- DISTANCE ENTRE 2 POINTS A ET B

Propriété :

Soit les points A et B de coordonnées :

$A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$



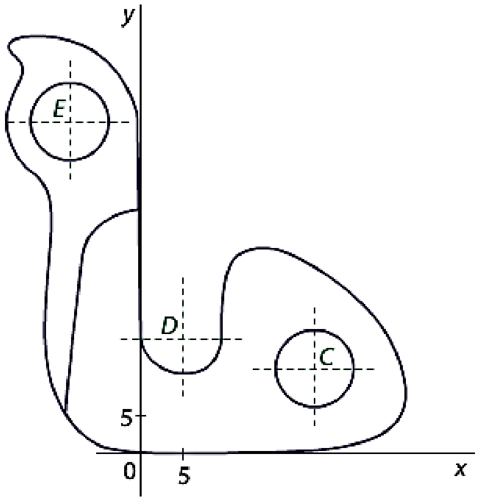
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont alors : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

La distance AB est égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$

On a donc : $$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemple :

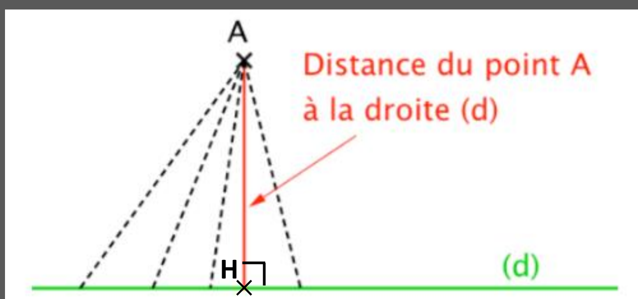
Une machine à commande numérique fabrique des supports de dérailleurs de vélo, dont le plan est donné sur la figure ci-contre. Les coordonnées des points C et E sont $C(21\,;10)$ et $E(-9\,;41)$. L'unité est le mm. Calculer la distance CE en mm :



5- DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE

Distance entre un point A et une droite (d) :

La distance entre A et (d) est la plus petite distance entre A et un point de (d).



Propriété :

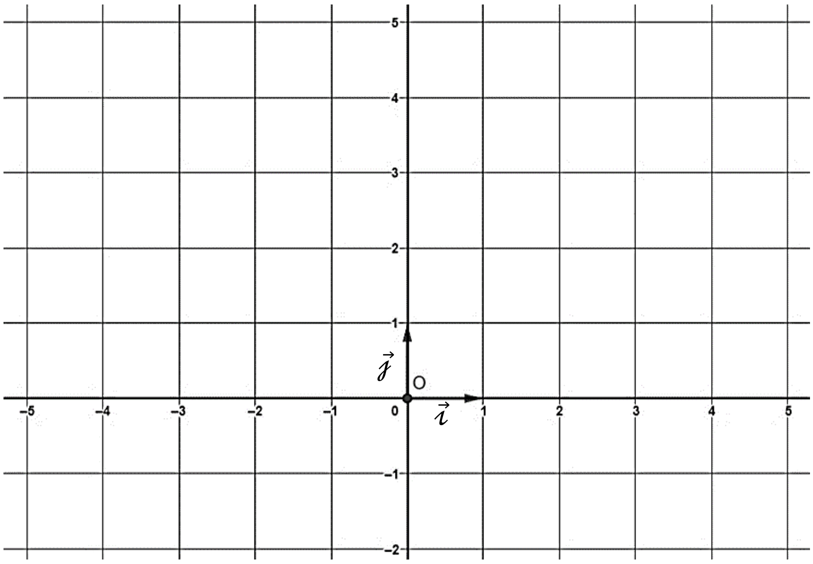
La distance entre A et (d) est la distance AH identifiée sur la figure ci-contre.

Le point H tel que $H \in (d)$ et $(AH) \perp (d)$ est appelé *projeté* orthogonal du point A sur (d).

Exemple : Soit les points A , B et C dont les coordonnées dans un repère ($O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}$) sont $A(-4\,;\,-1)$, $B(4\,;\,5)$ et $C(\,4\,;\,-1)$.

1- Placer les points dans le repère ci-contre.

2- Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$.



3- Calculer les distances CA et CB.

4- Le triangle ABC est rectangle en C. Montrer que l'aire $\mathcal{A}$ de ce triangle est $\mathcal{A} = 24$:

5- Montrer que la distance AB est $AB = 10$

6- Tracé le projeté orthogonal H du point C sur la droite (AB).

7- Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC en fonction de la base AB et de la hauteur CH de ce triangle.

8- En déduite la valeur de CH, qui est la distance entre C et la droite (AC).