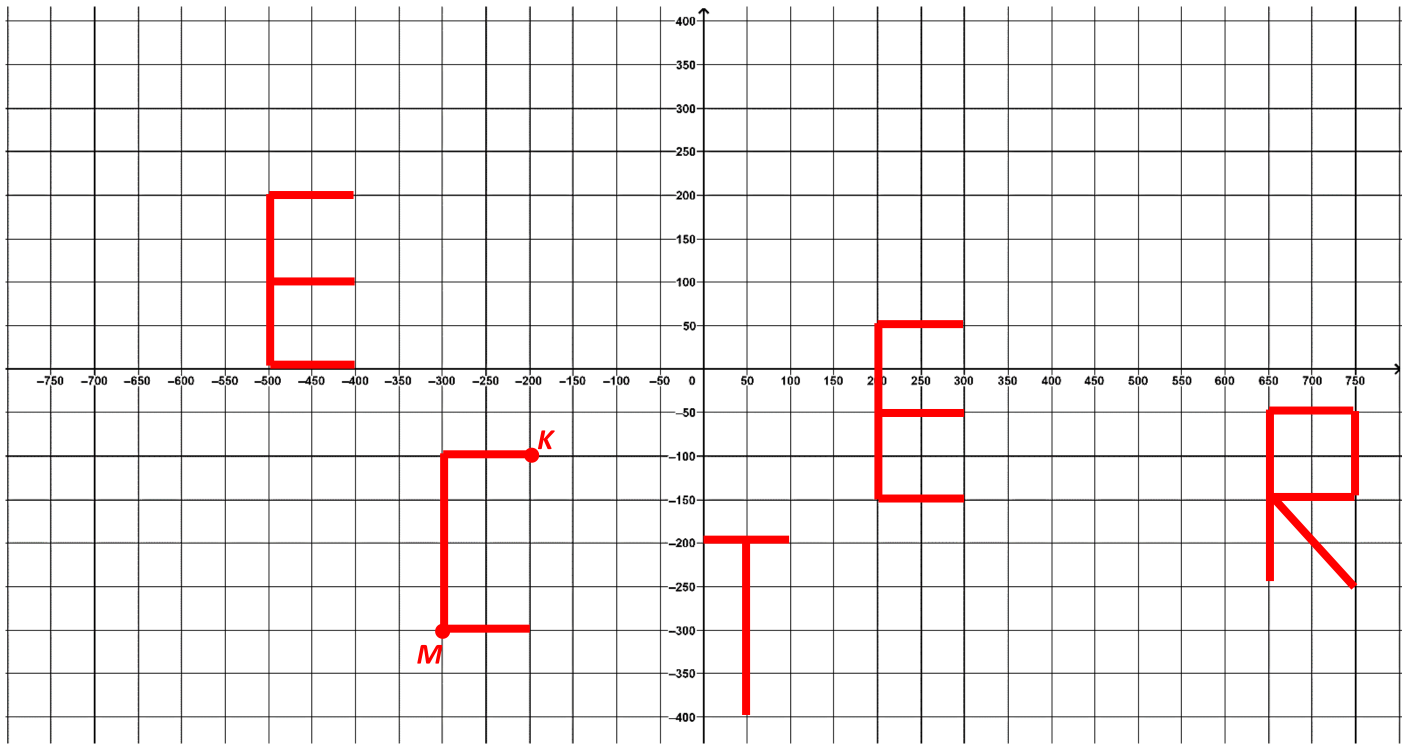
Chapitre 3 - Les vecteurs – 1ère partie

1- REPERAGE DES POINTS SUR UN ECRAN D'ORDINATEUR

Le tracé des formes sur n'importe quel écran nécessite la présence d'un repère gradué en pixels. Un repère de ce type est donné sur la figure ci-dessous, pour un écran de 1500 px de large et 800 px de haut.



⇨ Positionne ci-dessus, les points A , B et C de coordonnées :

$A(-700\,;350\,)$, $B(-650\,;200\,)$ et $C(-600\,;350\,)$

⇨ Trace les segments $[AB]$ et $[BC]$

⇨ Positionne les points D , E , F et G : $D(450;300\,)$, $E(450\,;100\,)$, $F(550\,;100\,)$ et $G(550\,;300\,)$

⇨ Trace les segments $[DE]$, $[EF]$ et $[FG]$

⇨ Donne les coordonnées des points K et M :

2- VECTEURS ASSOCIES A UNE TRANSLATION

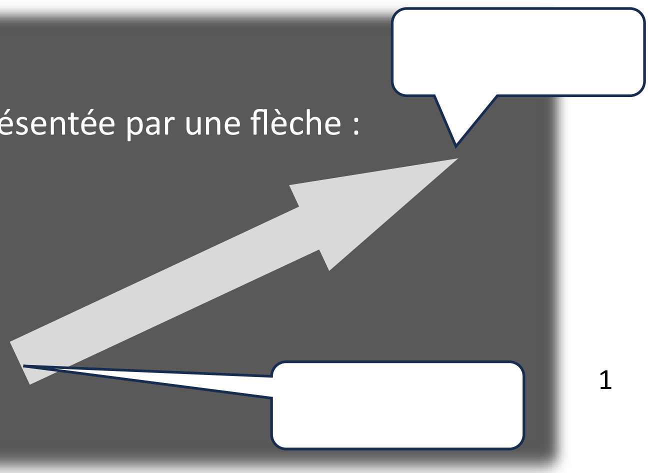
Pour tracer des formes statiques sur un écran, les coordonnées des points ou des pixels sont suffisantes. Par contre, si l'on veut que ces formes se mettent à bouger dans leur ensemble, il est intéressant d'utiliser la notion de vecteurs.

C'est quoi un vecteur ? :

Un vecteur est une entité mathématique représentée par une flèche :

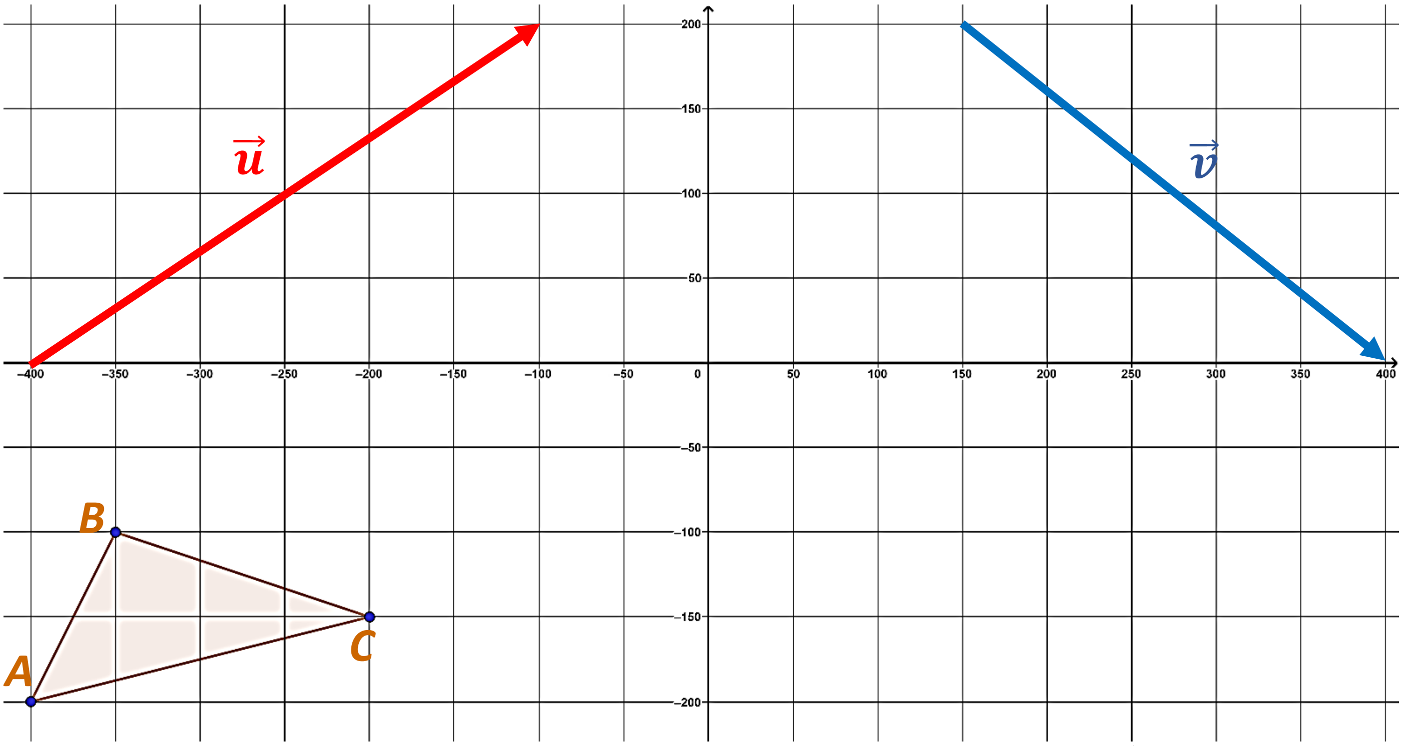
Un vecteur est caractérisé par :

-
-
-



⇨ Trace les points A’ , B’ , C’ , images des points A , B , C , par la translation de vecteur $\vec{u}$.

⇨ Trace et colorie en rouge le triangle A’B’C’ , image du triangle ABC , par la translation de vecteur $\vec{u}$.



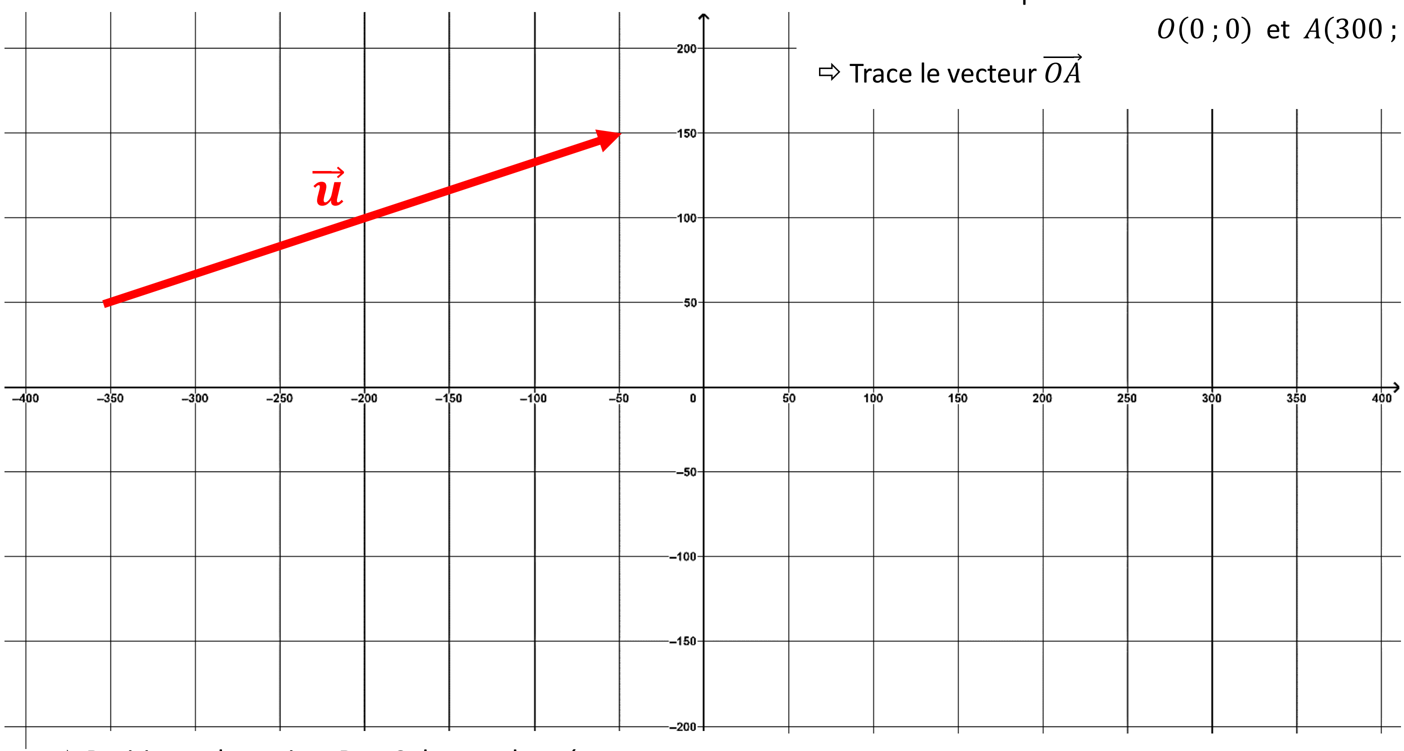
⇨ Trace les points A’’ , B’’ , C’’, images des points A’ , B’ , C’ , par la translation de vecteur $\vec{v}$.

⇨ Trace et colorie en bleu le triangle A’’B’’C’’ , image du triangle A’B’C' , par la translation de vecteur $\vec{v}$.

3- PLUSIEURS REPRESENTANTS POUR UN VECTEUR

⇨ Positionne les points O et A de coordonnées $O(0\,;0)$ et $A(300\,;100)$

⇨ Trace le vecteur $\overrightarrow{OA}$



⇨ Positionne les points B et C de coordonnées $B(-350\,;-150)$ et $C(-50\,;-50)$

⇨ Trace le vecteur $\overrightarrow{BC}$

⇨ Positionne les point D et E de coordonnées $D(100\,;-200)$ et $E(400\,;-100)$

⇨ Trace le vecteur $\overrightarrow{DE}$

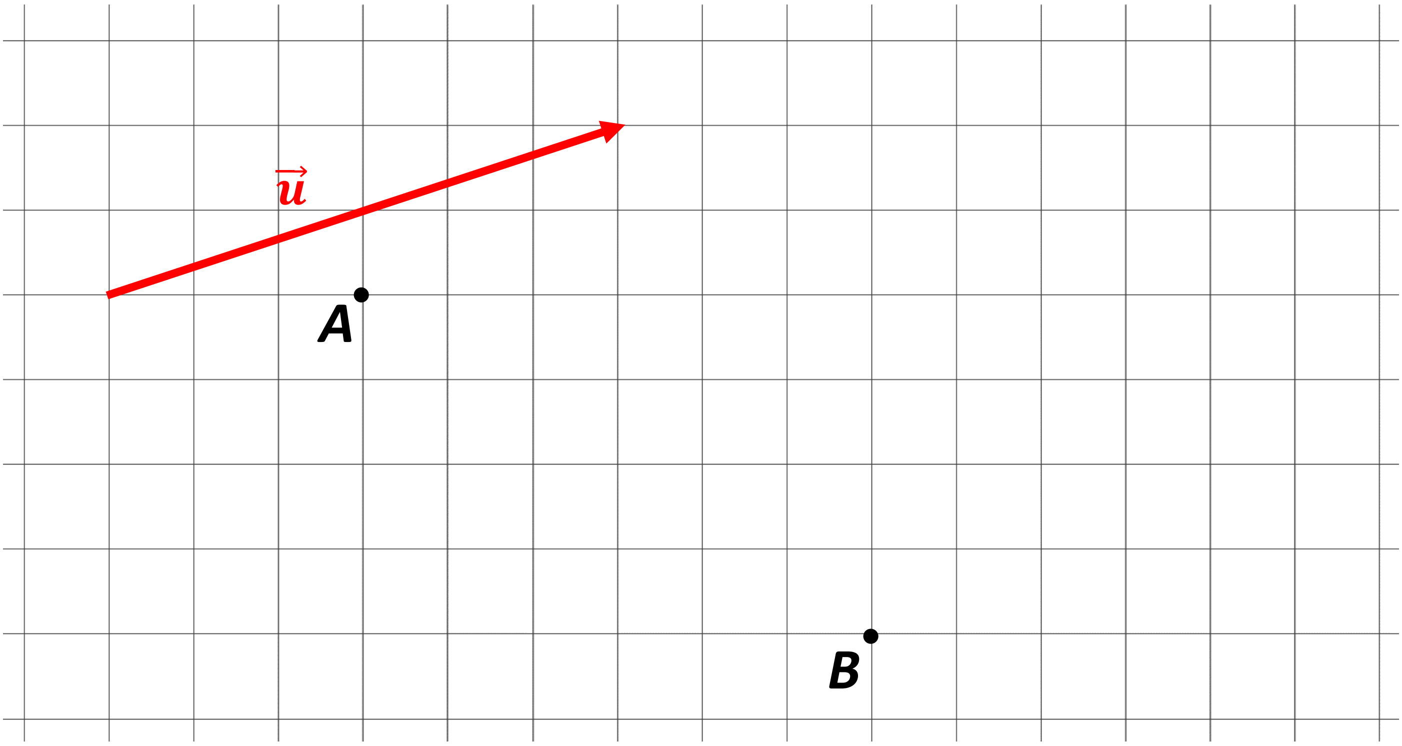
Pour définir une translation de vecteur $\vec{u}$, ce qui est important c'est la direction du mouvement et l'amplitude du mouvement. Par exemple, dans un jeu vidéo, lorsqu'un personnage se déplace suivant une translation, tous les pixels du personnage se déplacent d'une même longueur, dans une même direction.
Ainsi dans l'exemple précédent, pour définir une translation de vecteur $\vec{u}$, on aurait pu dire translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ ou translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, ou translation de vecteur $\overrightarrow{DE}$. Ces 3 translations reviennent à faire exactement la même chose.

<u>Représentant d'un vecteur</u> :

- Dans l'exemple précédent, les vecteurs $\vec{u}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont égaux :
- On dit aussi que, par exemple :

4- <u>EGALITE DE VECTEURS</u>

⇨ Sur la figure ci-dessous, trace le représentant de $\vec{u}$, d'origine A et le représentant de $\vec{u}$, d'origine B.



⇨ Trace le quadrilatère ABB'A' et colorie-le

⇨ Comment appelle-t-on ce type de polygone ? :

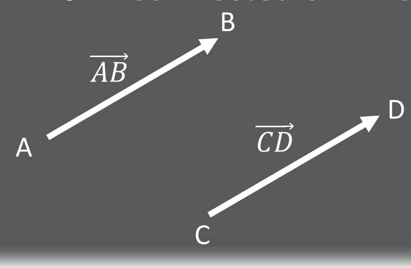
⇨ Rappelle ci-dessous les principales propriétés de ce type de polygone :

- *<u>Parallélisme des côtés opposés</u>* :
- *<u>Longueur des côtés opposés</u>* :
- *<u>Milieu des diagonales</u>* :

Egalité de vecteurs :

- Deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont égaux si :

- Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si :



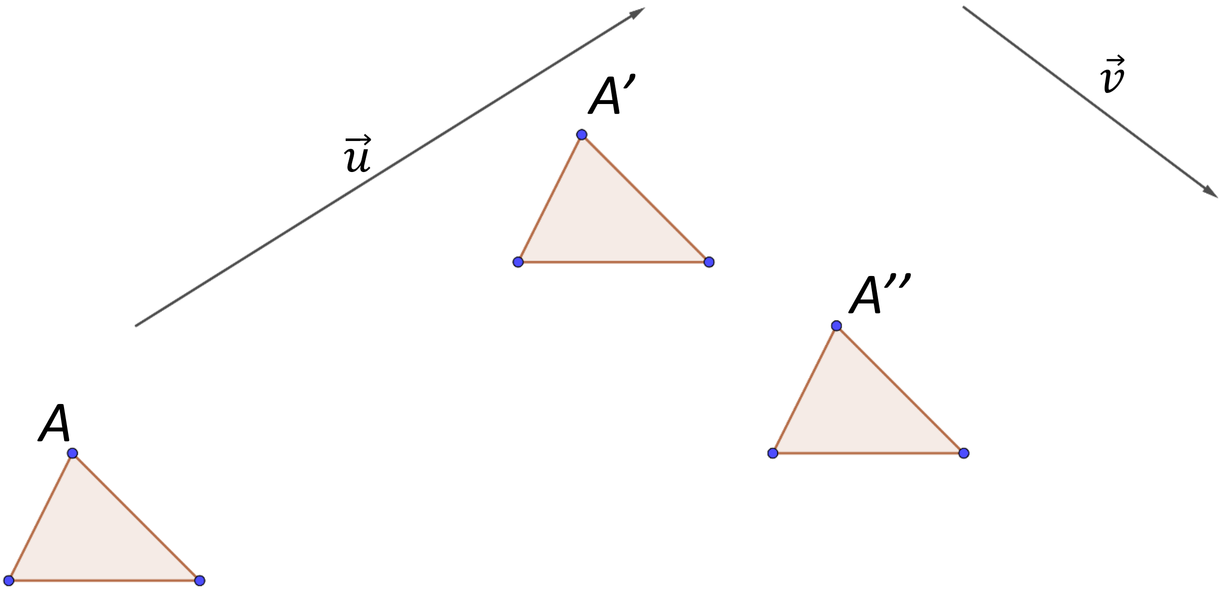
Remarque : Un vecteur est une entité mathématique sur laquelle on va réaliser des opérations. Cela nous sera d'une grande utilité, pas seulement en graphisme informatique, mais aussi dans de nombreux domaines de la physique.
Lorsque l'on réalise des opérations avec des nombres, on peut obtenir quelquefois la valeur 0. On aura exactement la même chose en réalisant des opérations avec les vecteurs. On a ainsi inventé le concept de vecteur nul qui est noté $\vec{0}$. Il peut être représenté par une flèche de longueur nulle.

5- Somme de vecteurs

⇨ Trace en bleu le représentant de $\vec{u}$ d'origine A et le représentant de $\vec{v}$ d'origine A'

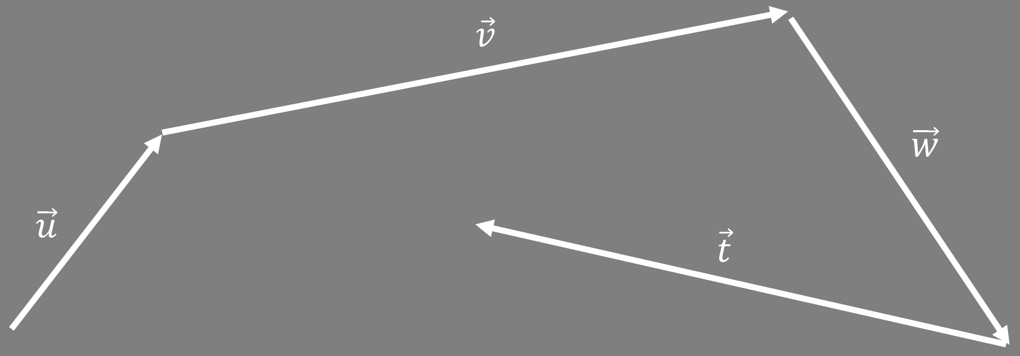
Lorsque l'on effectue une translation de vecteur $\vec{u}$ suivie d'une translation de vecteur $\vec{v}$, on obtient finalement une translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ qui déplace par exemple le point A sur le point A''

⇨ Trace en rouge le représentant de $\vec{u}+\ \vec{v}$ et d'origine A

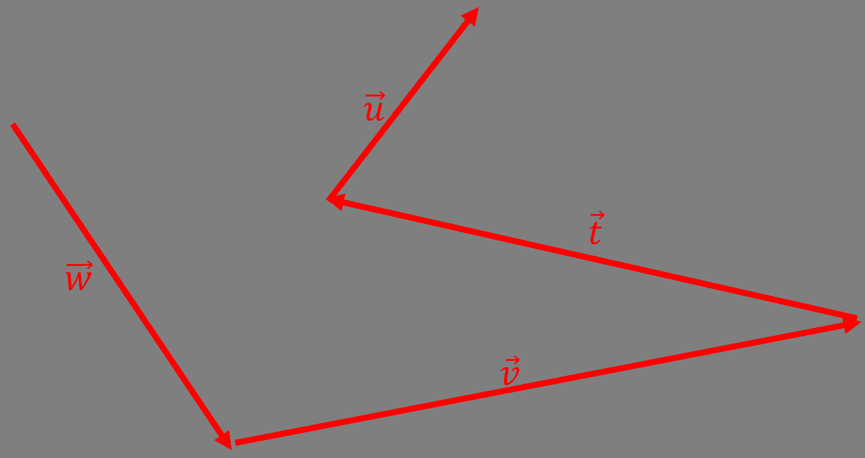


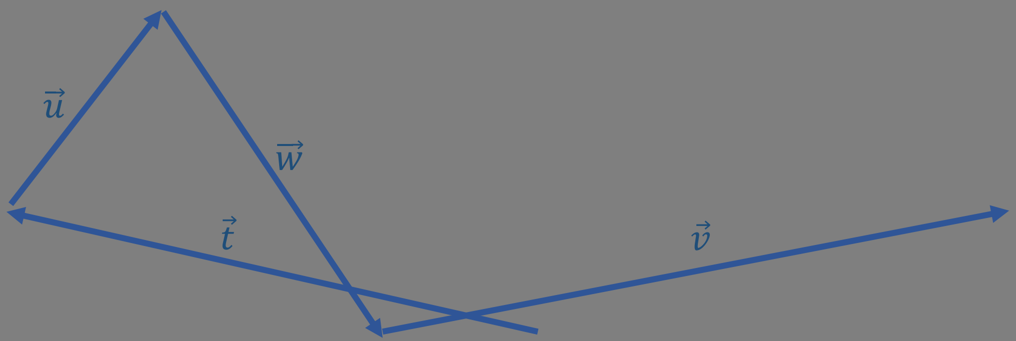
Somme de vecteurs :

Pour additionner des vecteurs, par exemple $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{t}$, on les met bout à bout. Le vecteur $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{t}$ a alors comme origine le 1er vecteur de la chaine et comme extrémité, le dernier.



La somme des vecteurs est **commutative**, ainsi l'ordre des vecteurs est indifférent.





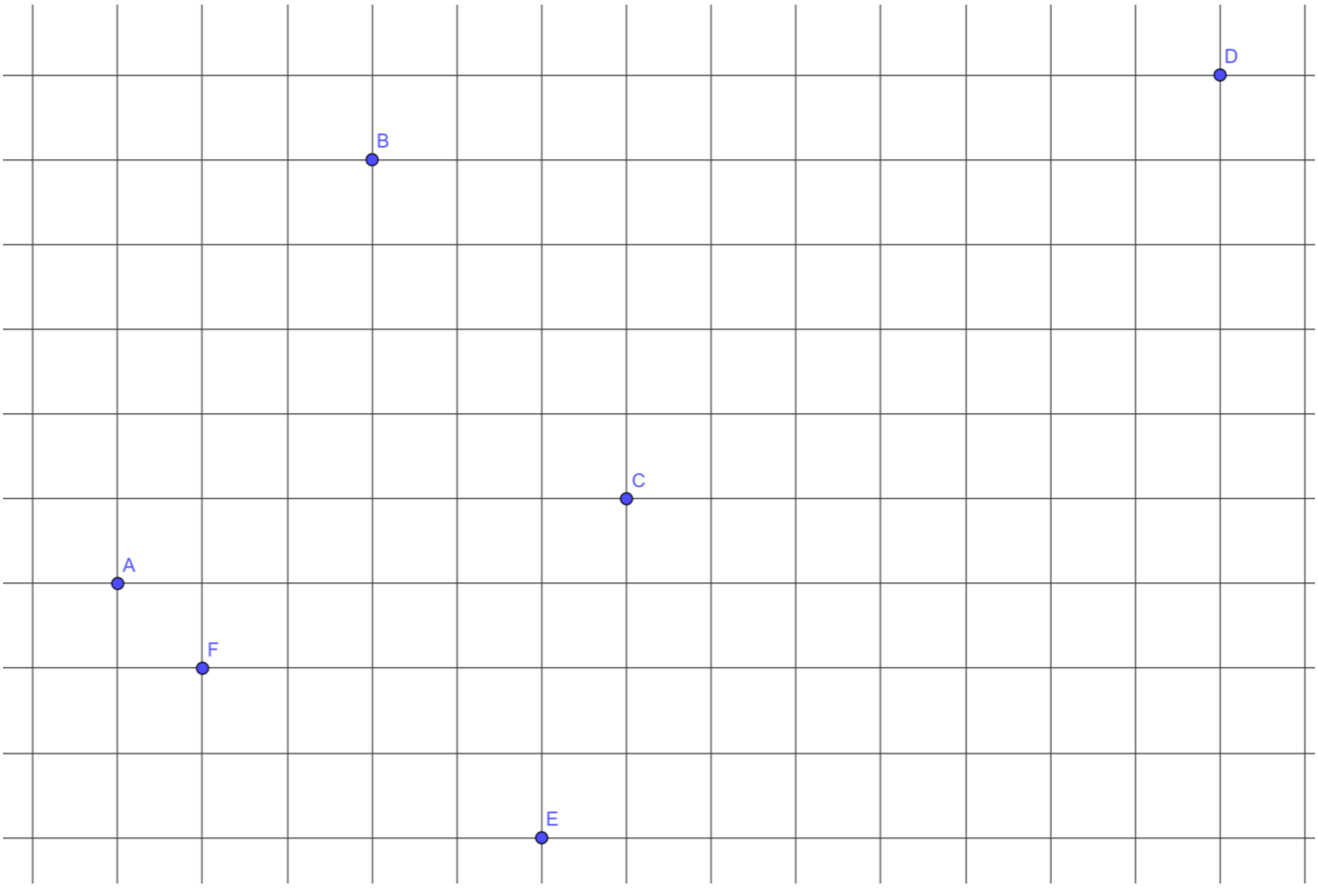
6- Relation de Chasles

Trace sur la figure qui suit :

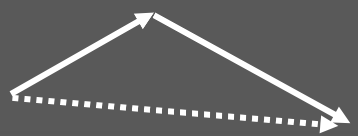
⇨ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{EF}$

⇨ le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$

⇨ le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA}$



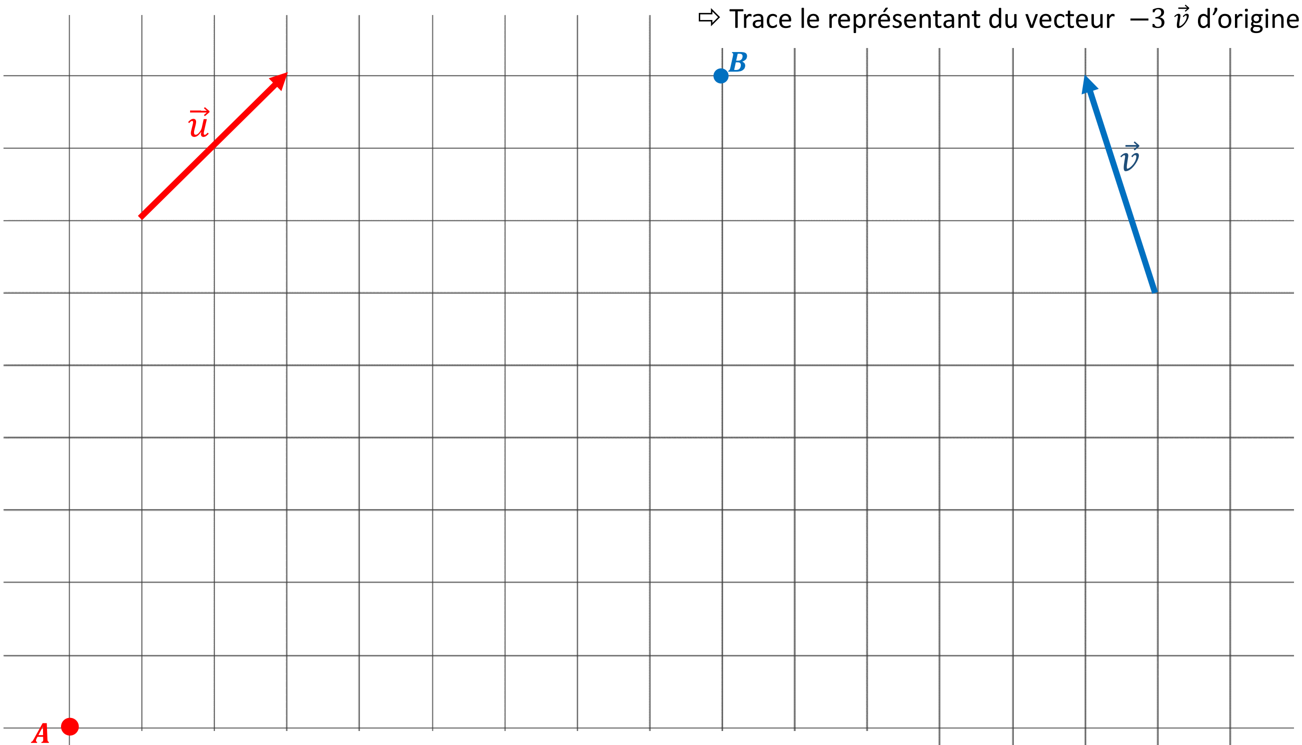
<u>Relation de Chasles</u> : Pour tous points A, B, C du plan, on a toujours :



7- PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE

⇨ Trace le représentant du vecteur $4{,}5\,\vec{u}$ d'origine A

⇨ Trace le représentant du vecteur $-3\,\vec{v}$ d'origine B

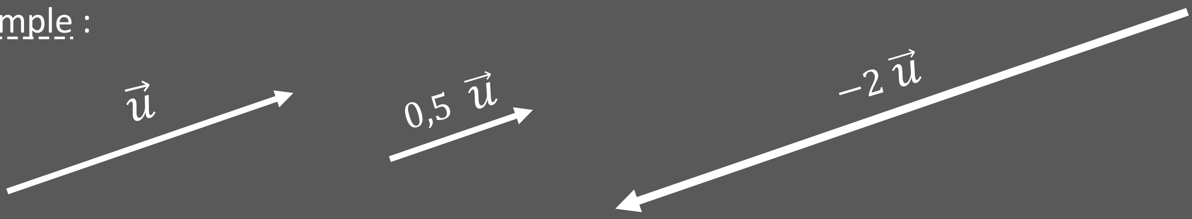


⇨ Trace le représentant du vecteur $4{,}5\,\vec{u} + (-3\,\vec{v})$ d'origine A

Propriété : Lorsque l'on multiplie un nombre k par un vecteur $\vec{u}$:

- Si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, alors $k\,\vec{u} = \vec{0}$
- Si $k > 0$ alors le vecteur $k\,\vec{u}$ a même direction et même sens et sa norme est celle de $\vec{u}$ multipliée par k
- Si $k < 0$ alors le vecteur $k\,\vec{u}$ a même direction mais avec un sens contraire et sa norme est celle de $\vec{u}$ multipliée par $(-k)$

Exemple :



8- UTILITE DU CALCUL VECTORIEL

Les vecteurs permettent de modéliser mathématiquement ce qui se produit dans la nature. En utilisant un modèle mathématique, on peut ensuite faire des calculs qui permettront de mieux comprendre ce qui se passe dans la réalité.

Par exemple, on peut utiliser des vecteurs pour modéliser les forces qui prennent naissance dans les articulations d'un VTT au passage d'une bosse.

Sur la figure qui suit, les forces aux points C et B peuvent être représentées par « des vecteurs forces » $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tracés sur la figure du bras supérieur **3**.

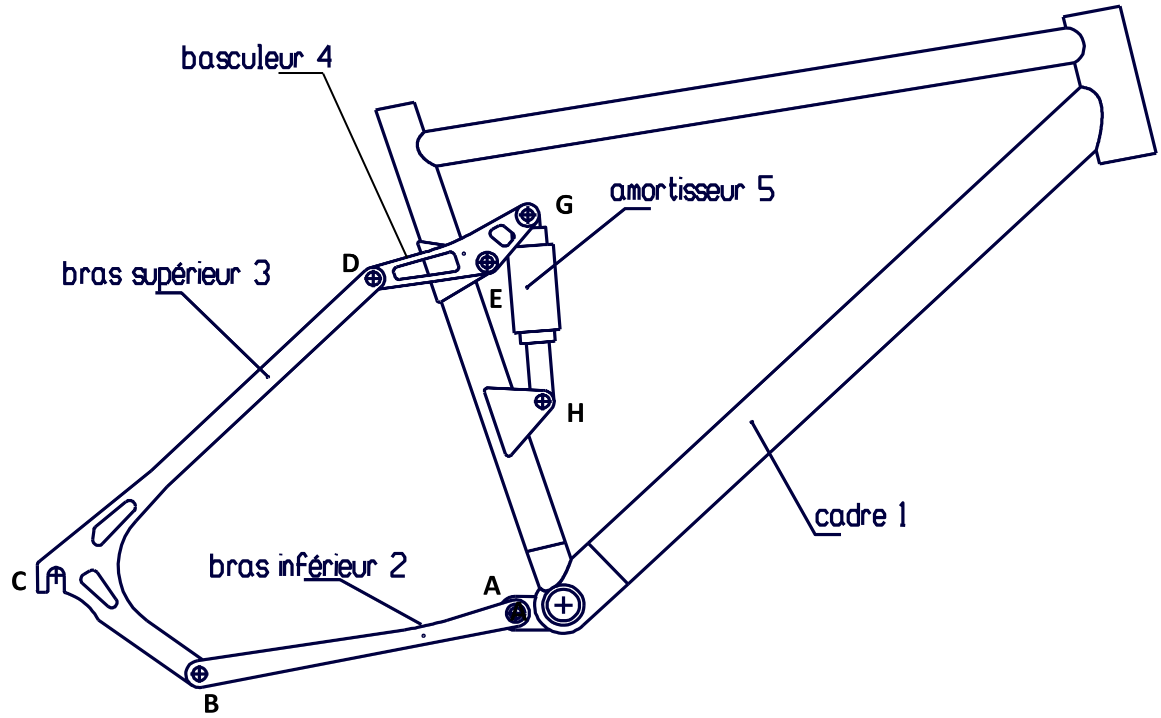
Le vecteur $\vec{u}$ représente une force de 45 daN *(45 décaNewton = force permettant de soulever 45 kg).* Le vecteur $\vec{v}$ représente une force de 100 daN. Ces vecteurs ont respectivement des longueurs de 45 mm pour $\vec{u}$ et 100 mm pour $\vec{v}$.

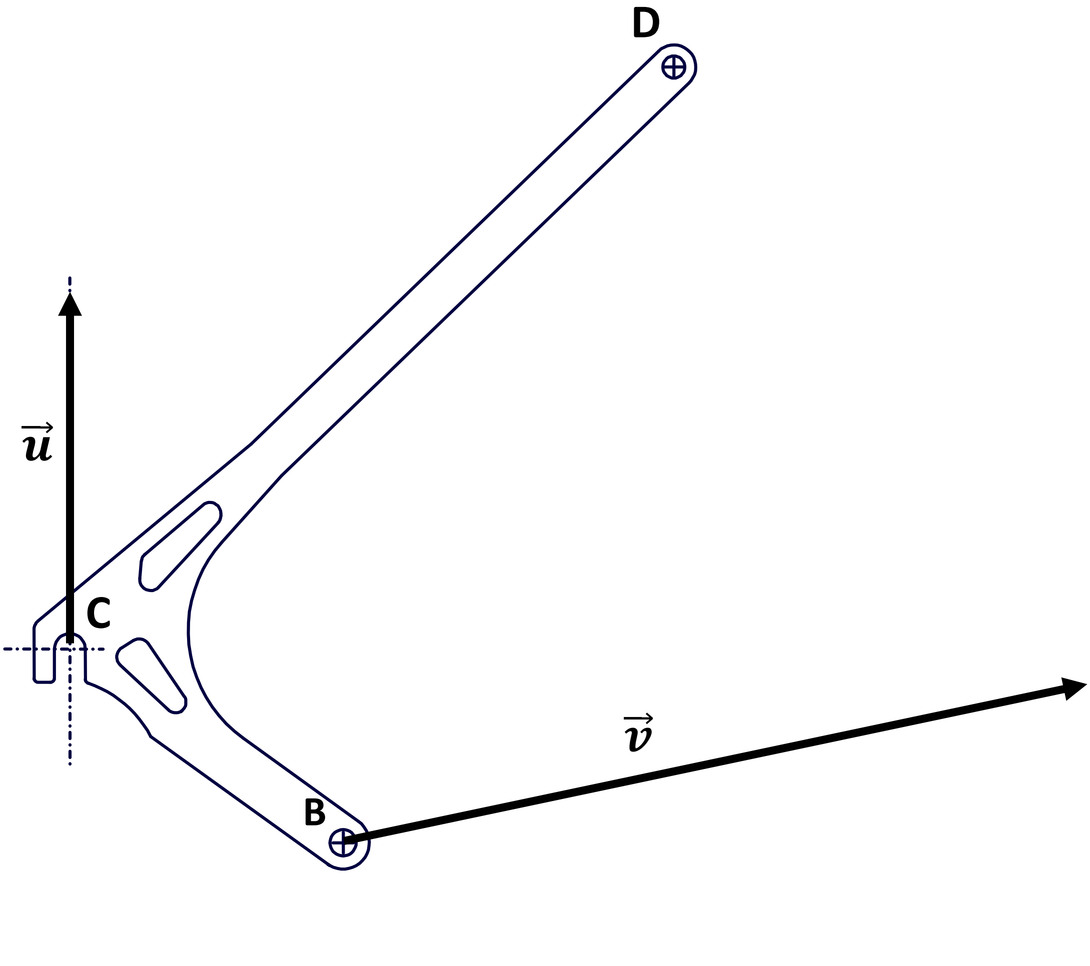
⇨ En utilisant règle et équerre, trace les représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'origine D.

⇨ Trace le vecteur représentant du vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ d'origine D.

Ce vecteur $\vec{w}$ représente le vecteur force qui est transmis sur le point D du bras du VTT.

⇨ Mesure la longueur de ce vecteur et déduis-en l'intensité de la force en daN dans l'articulation du point D.


basculeur 4
G
amortisseur 5
D
bras supérieur 3
E
H
cadre 1
C
bras inférieur 2
A
B


D
$\vec{u}$
C
$\vec{v}$
B