

Problème 1 : Consommation d'essence d'un véhicule

x = vitesse du véhicule en km/h

Lorsqu'un véhicule roule à une vitesse v comprise entre 20 km/h et 130 km/h, sa consommation d'essence peut s'exprimer en fonction de sa vitesse v par :

$$\text{Consommation en litres pour 100 km de trajet} = 0,06 v + \frac{150}{v}$$

Soit f la fonction définie pour $x \in [20 ; 130]$ par :

$$f : x \rightarrow f(x) = 0,06 x + \frac{150}{x}$$

$f(x)$ = consommation en l/100km

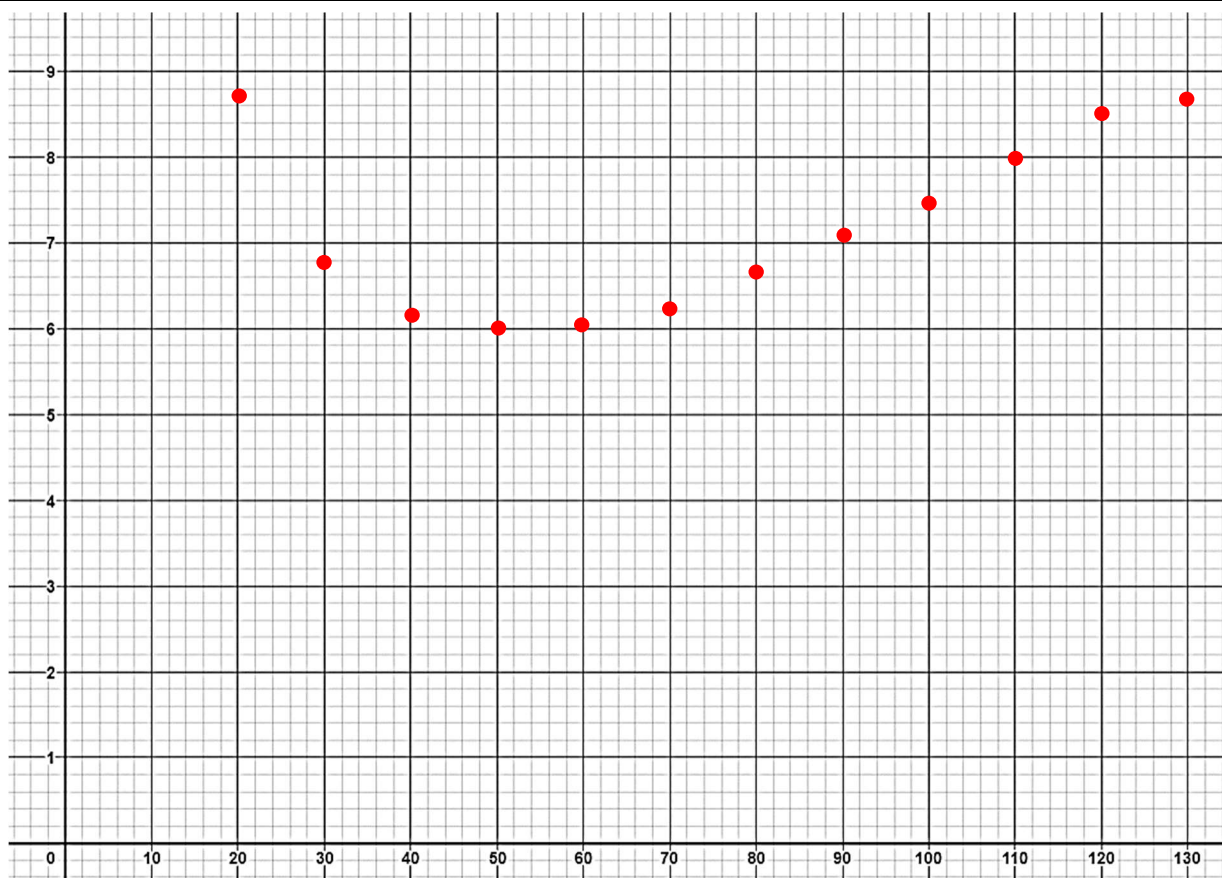
- 1- Calculer l'image de 20 par f , c'est-à-dire la consommation d'essence lorsque le véhicule roule à 20 km/h :

$$f(20) = 0,06 \times 20 + \frac{150}{20} = 8,7$$

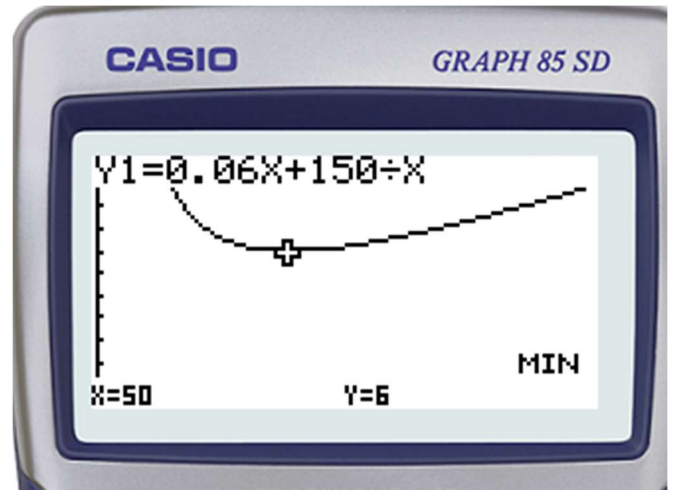
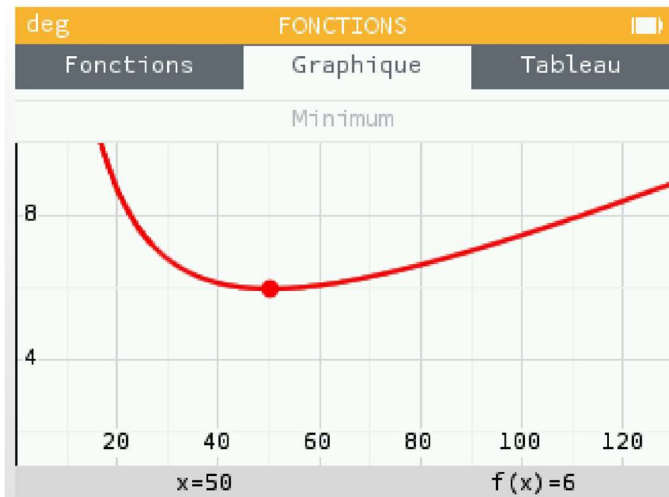
- 2- Calculer (arrondir au dixième) l'image de 130 : $f(130) = 0,06 \times 130 + \frac{150}{130} \approx 8,95 \approx 9,0$

- 3- Compléter le tableau de valeur ci-dessous et tracer la courbe représentative de la fonction f :

$f(30) = 0,06 \times 30 + \frac{150}{30} = 6,8$	$f(80) = 0,06 \times 80 + \frac{150}{80} = 6,675 \approx 6,7$
$f(40) = 0,06 \times 40 + \frac{150}{40} = 6,15$	$f(90) = 0,06 \times 90 + \frac{150}{90} \approx 7,066 \approx 7,1$
$f(50) = 0,06 \times 50 + \frac{150}{50} = 6$	$f(100) = 0,06 \times 100 + \frac{150}{100} = 7,5$
$f(60) = 0,06 \times 60 + \frac{150}{60} = 6,1$	$f(110) = 0,06 \times 110 + \frac{150}{110} \approx 7,96 \approx 8,0$
$f(70) = 0,06 \times 70 + \frac{150}{70} \approx 6,34 \approx 6,3$	$f(120) = 0,06 \times 120 + \frac{150}{120} = 8,45 \approx 8,5$



- 4- Tracer la courbe sur calculatrice pour déterminer la valeur de la vitesse qui permet d'avoir une consommation minimale (arrondie au dixième).



Le minimum de la courbe est atteint pour $x = 50$. On a alors : $f(50) = 6$. Concrètement cela signifie que la voiture a une consommation d'essence minimale à une vitesse de 50 km/h. Cette consommation est alors de 6 l/100 km.

- 5- Construire le tableau de variation de la fonction f

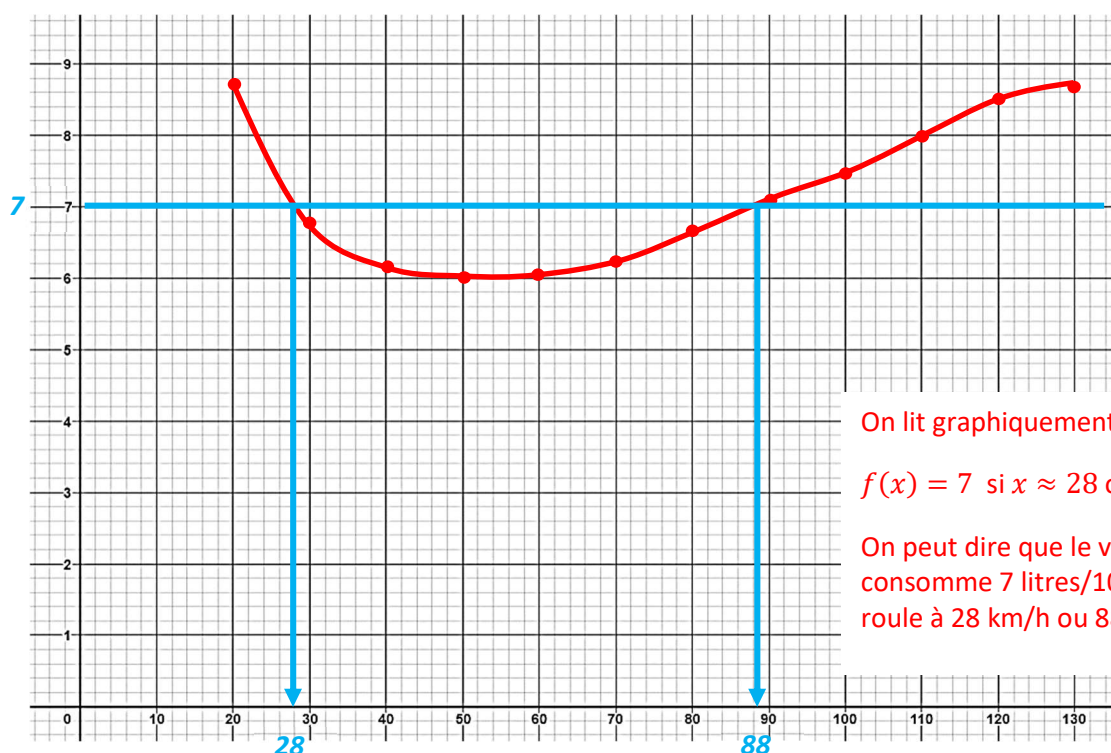
La fonction f est **définie** sur l'intervalle $[20 ; 130]$.

Elle est **décroissante** sur l'intervalle $[20 ; 50]$.

Elle est **croissante** sur l'intervalle $[50 ; 130]$.

x	20	50	130
Variations de f	8,7	6,0	9,0

- 6- A partir du graphique tracé question 3), résoudre l'équation $f(x) = 7$, c'est-à-dire déterminer pour quelles vitesses x , le véhicule consomme 7 litres/100km (définir x avec une précision égale à l'unité- laisser les traits de construction).

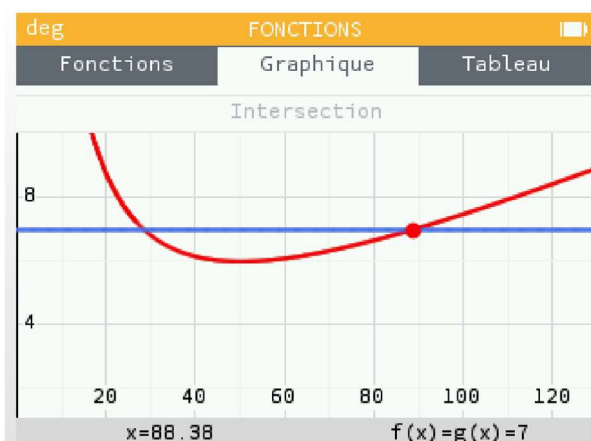
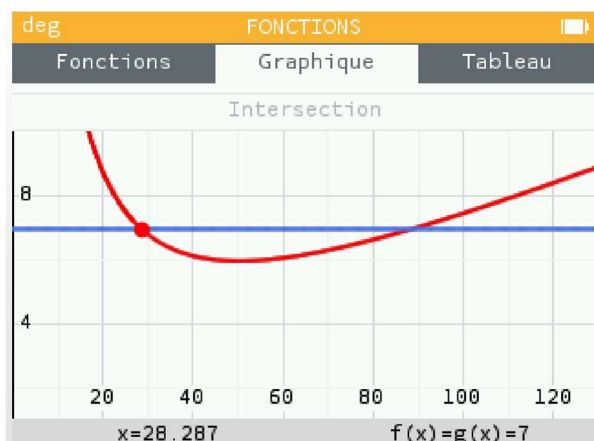
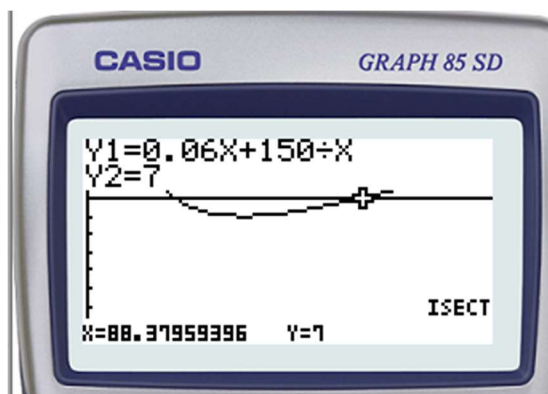
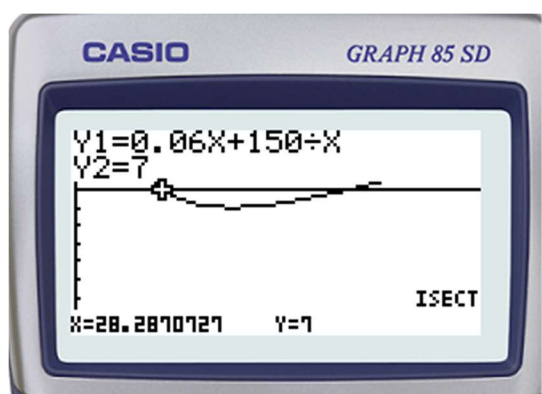


On lit graphiquement que :

$f(x) = 7$ si $x \approx 28$ ou si $x \approx 88$

On peut dire que le véhicule consomme 7 litres/100km lorsqu'il roule à 28 km/h ou 88 km/h.

- 7- Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 7$ au dixième près, en utilisant à présent la calculatrice.



On trace la courbe d'équation $y = 7$. On détermine les coordonnées des points d'intersections des 2 courbes. On en déduit que : $f(x) = 7$ si $x \approx 28,3$ ou si $x \approx 88,4$

Ainsi la valeur 7 possède 2 antécédents : $x \approx 28,3$ et si $x \approx 88,4$

On peut écrire aussi : $f(x) = 7$ seulement si $x \in \{28,3 ; 88,4\}$

Ou encore : $f(x) = 7$ a comme ensemble de solutions $S = \{28,3 ; 88,4\}$

- 8- Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 7$, c'est-à-dire déterminer l'intervalle des vitesses x , sur lequel le véhicule consomme moins de 7l/100km

On lit sur le graphe que $f(x) \leq 7$ si $x \in [28,3 ; 88,4]$

- 9- Résoudre l'inéquation $f(x) > 7$, c'est-à-dire déterminer l'intervalle des vitesses x , sur lequel le véhicule consomme plus de 7l/100km

On lit sur le graphe que $f(x) > 7$ si $x \in [20 ; 28,3[\cup]88,4 ; 130]$

Problème 2 : Fonction mathématique abstraite

On définit la fonction : $f : x \rightarrow f(x) = x - (0,5x^2 - 4x)$ pour $x \in [-1 ; 11]$

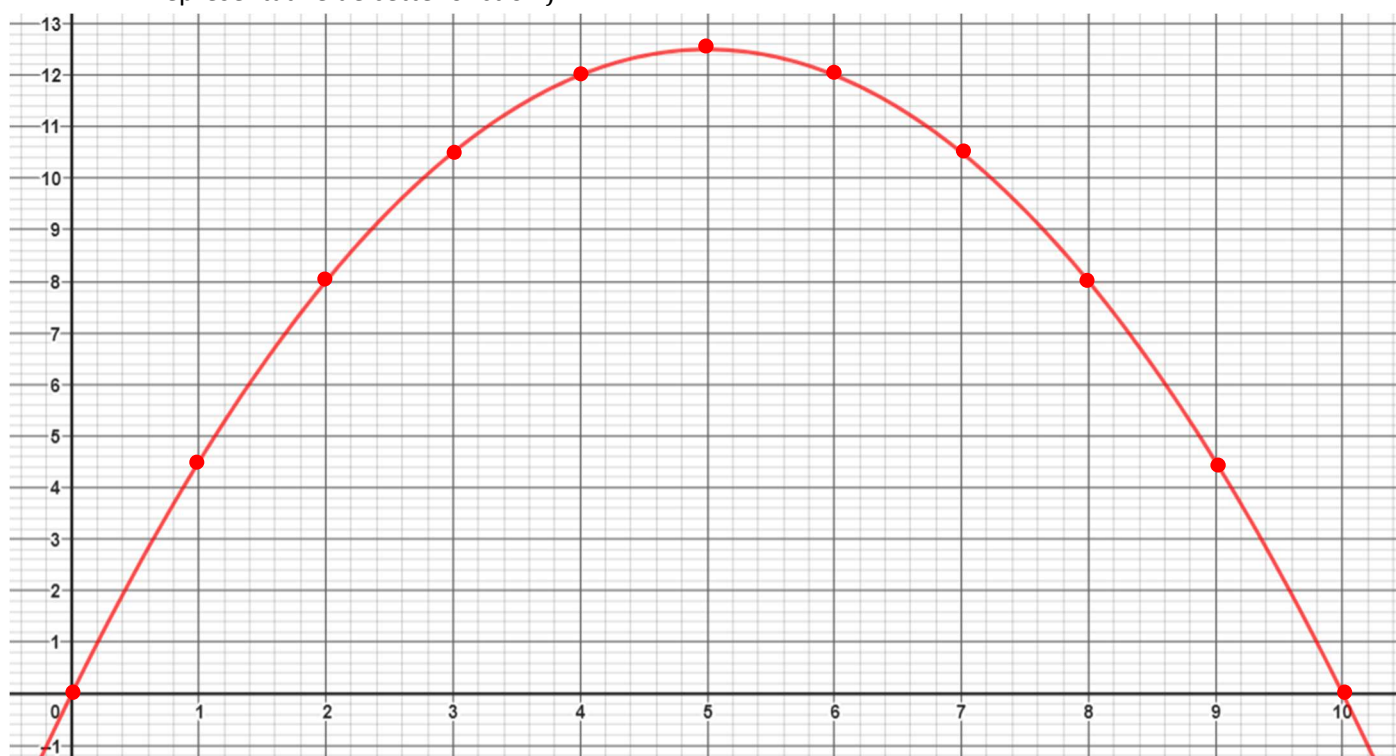
1- Simplifier l'expression de $f(x)$ et la factoriser.

$$f(x) = x - (0,5x^2 - 4x) = x - 0,5x^2 + 4x = -0,5x^2 + 5x = x(-0,5x + 5)$$

2- Remplir le tableau de valeur suivant sans donner le détail des calculs et en utilisant l'expression simplifiée de $f(x)$

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(x)$	-5,5	0	4,5	8	10,5	12	12,5	12	10,5	8	4,5	0	-5,5

3- Positionner sur le graphe ci-dessous, les 13 points calculés précédemment et tracer la courbe représentative de cette fonction f



4- Tracer cette courbe sur votre calculatrice, et déterminer les coordonnées précises du point maximum.

Le maximum de la courbe est atteint pour $x = 5$. On a alors : $f(5) = 12,5$. Les coordonnées du point maximum sont donc $(5 ; 12,5)$

5- Construire le tableau de variation de $f(x)$.

La fonction f est **définie** sur l'intervalle $[-1 ; 11]$.

Elle est **croissante** sur l'intervalle $[-1 ; 5]$.

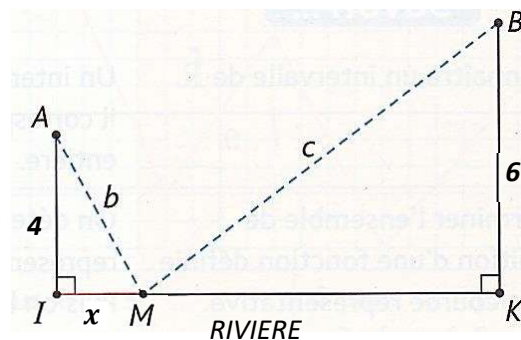
Elle est **décroissante** sur l'intervalle $[5 ; 11]$.

x	-1	5	11
Variations de f	-5,5	12,5	-5,5

Problème 3 : Installation d'une canalisation

Deux villages A et B sont situés près d'une rivière. On souhaite installer une station de pompage M sur la rivière qui permettrait d'alimenter en eau les 2 villages. La situation est schématisée par le graphique ci-contre avec $AI = 4$ km ; $BK = 6$ km ; $IK = 14$ km ; $IM = x$ km

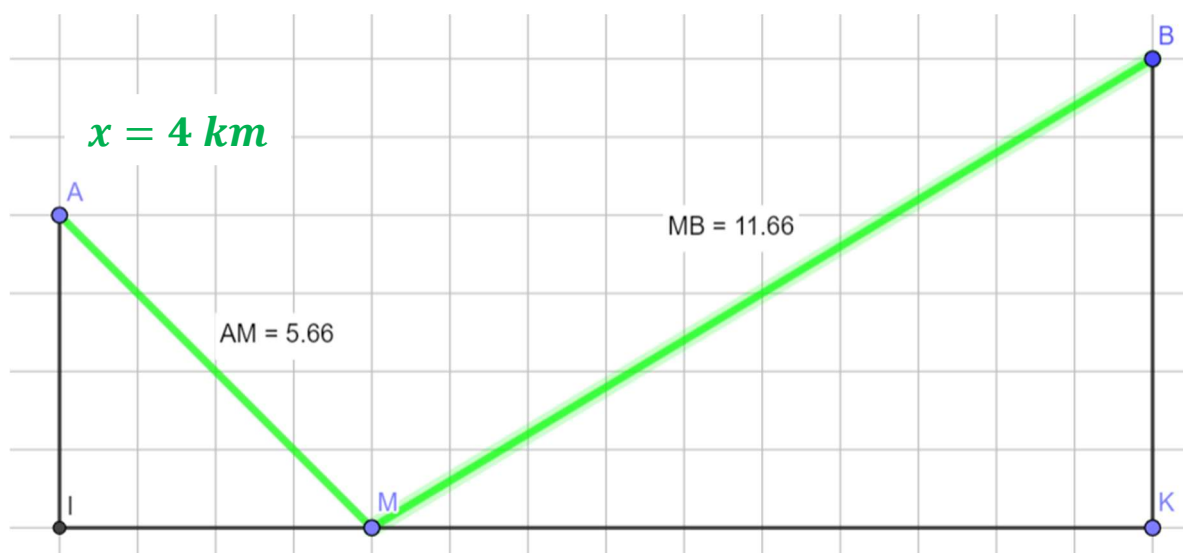
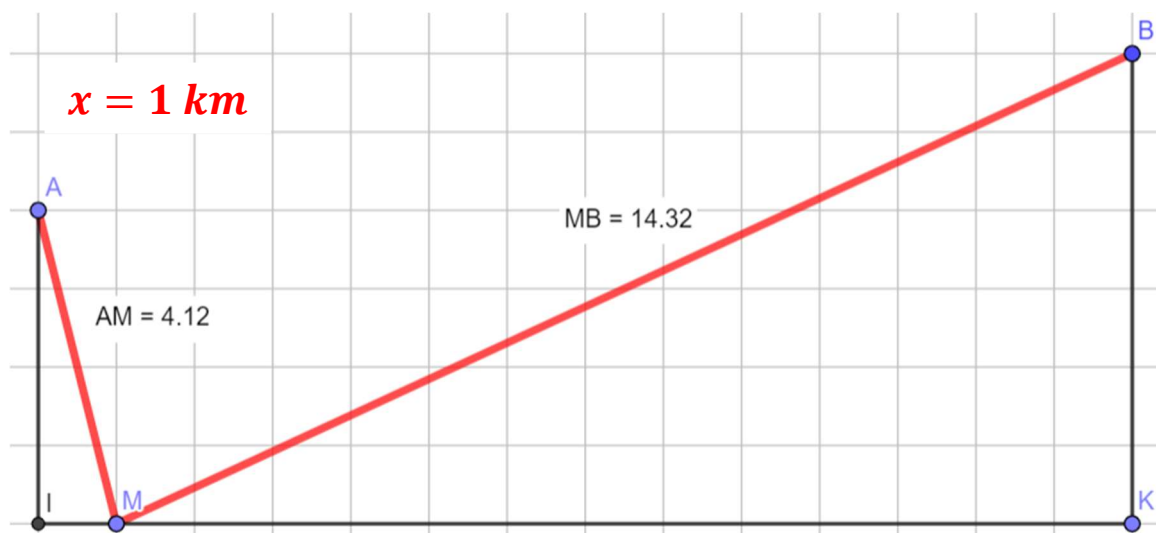
On cherche à placer le point M de façon à obtenir une longueur de canalisation minimale. C'est-à-dire que l'on recherche la distance x qui permette d'avoir une somme $MA + MB$ la plus petite possible.

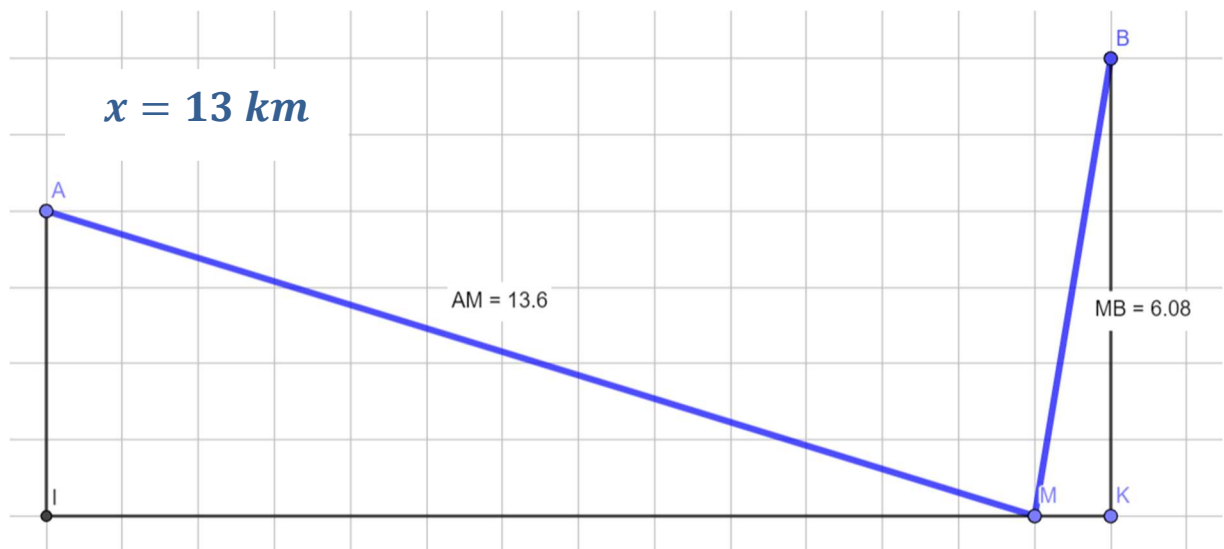


- 1- Le point M se situant entre les points I et K, dans quel intervalle doit appartenir x ? Dessiner à l'échelle 1/100 000, le plan faisant apparaître les points A, I, K, B et la rivière (1 km en réalité font 1 cm sur le plan). Tracer en rouge la canalisation pour $x = 1$ km, en vert pour $x = 4$ km, en bleu pour $x = 13$ km. Mesurer à la règle, les longueurs de canalisation obtenues et compléter le tableau ci-dessous :

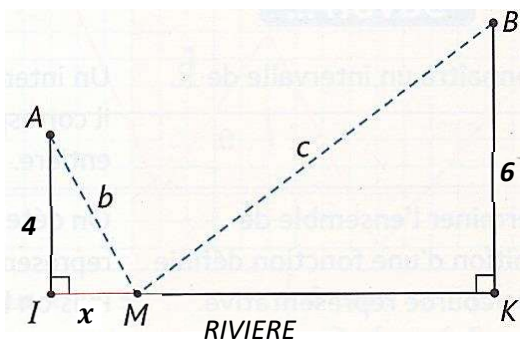
Distance $x = IM$ en km	1	4	13
Longueur canalisation $AM+MB$ en km	4,12 + 14,32 = 18,44	5,66 + 11,66 = 17,32	13,6 + 6,08 = 19,68

Comme le point M défini par l'abscisse x se situe entre les points I et K, on doit avoir $x \in [0 ; 14]$





- 2- Montrer que pour une distance x donnée, la longueur de la canalisation peut être calculée en utilisant la fonction f suivante, définie pour $x \in [0 ; 14]$ par : $f : x \rightarrow f(x) = \sqrt{16 + x^2} + \sqrt{36 + (14 - x)^2}$
- $\swarrow$ $x = \text{distance IM en km}$
 $\searrow$ $f(x) = \text{longueur canalisation en km}$



Comme $IK = 14$, $IM = x$ et comme $IM + MK = IK$, on a :

$$x + MK = 14$$

On a donc : $MK = 14 - x$

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle AMI, rectangle en I : $b^2 = x^2 + 4^2 = x^2 + 16$

On a donc : $b = \sqrt{16 + x^2}$

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle BMK, rectangle en K :

$$c^2 = MK^2 + 6^2 = (14 - x)^2 + 36$$

On a donc : $c = \sqrt{36 + (14 - x)^2}$

La longueur de la canalisation est égale à $b + c$, elle est donc égale à $\sqrt{16 + x^2} + \sqrt{36 + (14 - x)^2}$

Cette longueur peut ainsi être calculée en utilisant la fonction f suivante, définie pour $x \in [0 ; 14]$ par :

$$f : x \rightarrow f(x) = \sqrt{16 + x^2} + \sqrt{36 + (14 - x)^2}$$

- 3- Calculer l'image de 1 par f , c'est-à-dire la longueur de la canalisation en km si $x = 1$ km

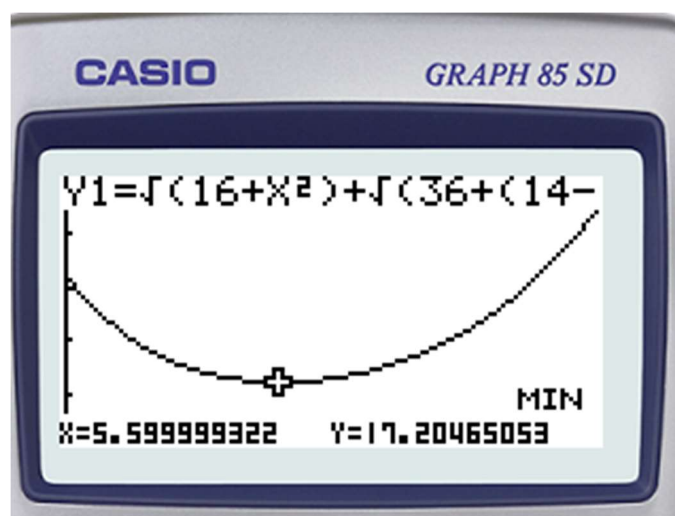
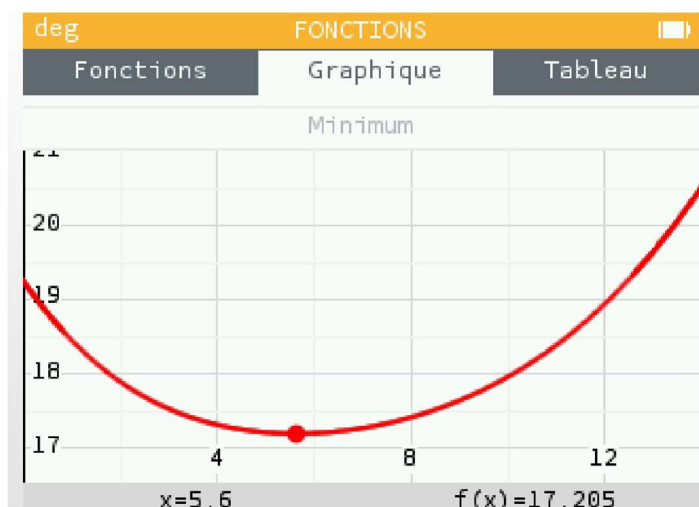
$$\text{On a : } f(1) = \sqrt{16 + 1^2} + \sqrt{36 + (14 - 1)^2} = \sqrt{17} + \sqrt{36 + 13^2} = \sqrt{17} + \sqrt{205} \approx 18,44$$

- 4- Calculer l'image de 4 par f et de 13 par f . Comparer ces valeurs avec celles mesurées dans la question 1)

$$\text{On a : } f(4) = \sqrt{16 + 4^2} + \sqrt{36 + (14 - 4)^2} = \sqrt{32} + \sqrt{36 + 10^2} = \sqrt{32} + \sqrt{136} \approx 17,32$$

$$\text{On a : } f(13) = \sqrt{16 + 13^2} + \sqrt{36 + (14 - 13)^2} = \sqrt{185} + \sqrt{36 + 1^2} = \sqrt{185} + \sqrt{37} \approx 19,68$$

- 5- Soit C_f la courbe représentative de la fonction f . Tracer sur calculatrice la courbe C_f avec comme fenêtre graphique : $0 \leq x \leq 14$ et $16 \leq y \leq 21$. Déterminer (arrondie au dixième), la distance x qui permet d'obtenir une longueur de canalisation minimale. Quelle est cette longueur ?



Le minimum de cette fonction sur l'intervalle $[0 ; 14]$ est obtenu pour $x \approx 5,6$. Ce minimum est égal approximativement à 17,2.

Pour avoir une canalisation de longueur minimale, il faudra placer le point M sur la rivière, à 5,6 km du point I. La longueur de la canalisation sera ainsi minimale et égale à environ 17,2 km.

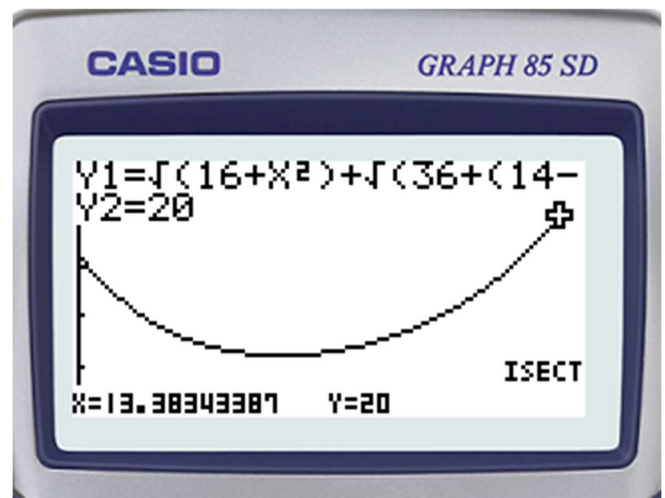
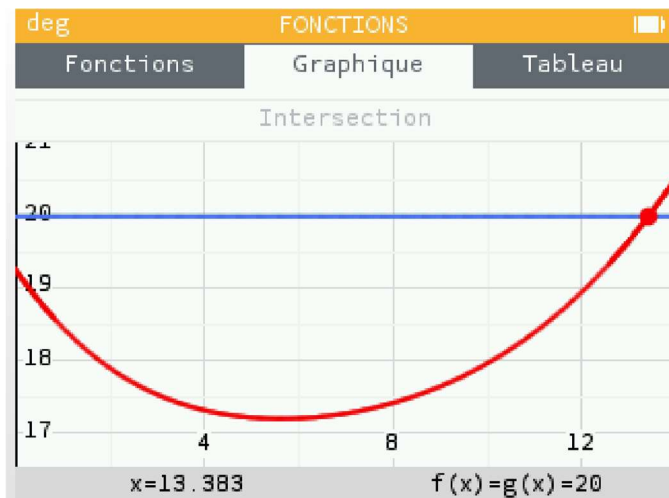
- 6- Construire le tableau de variation de la fonction f (arrondir au dixième les valeurs de $f(x)$)

x	0	5,6	14
Variations de f	19,2	17,2	20,6

$$\text{On a : } f(0) = \sqrt{16 + 0^2} + \sqrt{36 + (14 - 0)^2} = \sqrt{16} + \sqrt{36 + 14^2} = 4 + \sqrt{232} \approx 19,2$$

$$f(14) = \sqrt{16 + 14^2} + \sqrt{36 + (14 - 14)^2} = \sqrt{212} + \sqrt{36} = \sqrt{212} + 6 \approx 20,6$$

7- Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 20$ au dixième près, en utilisant la calculatrice

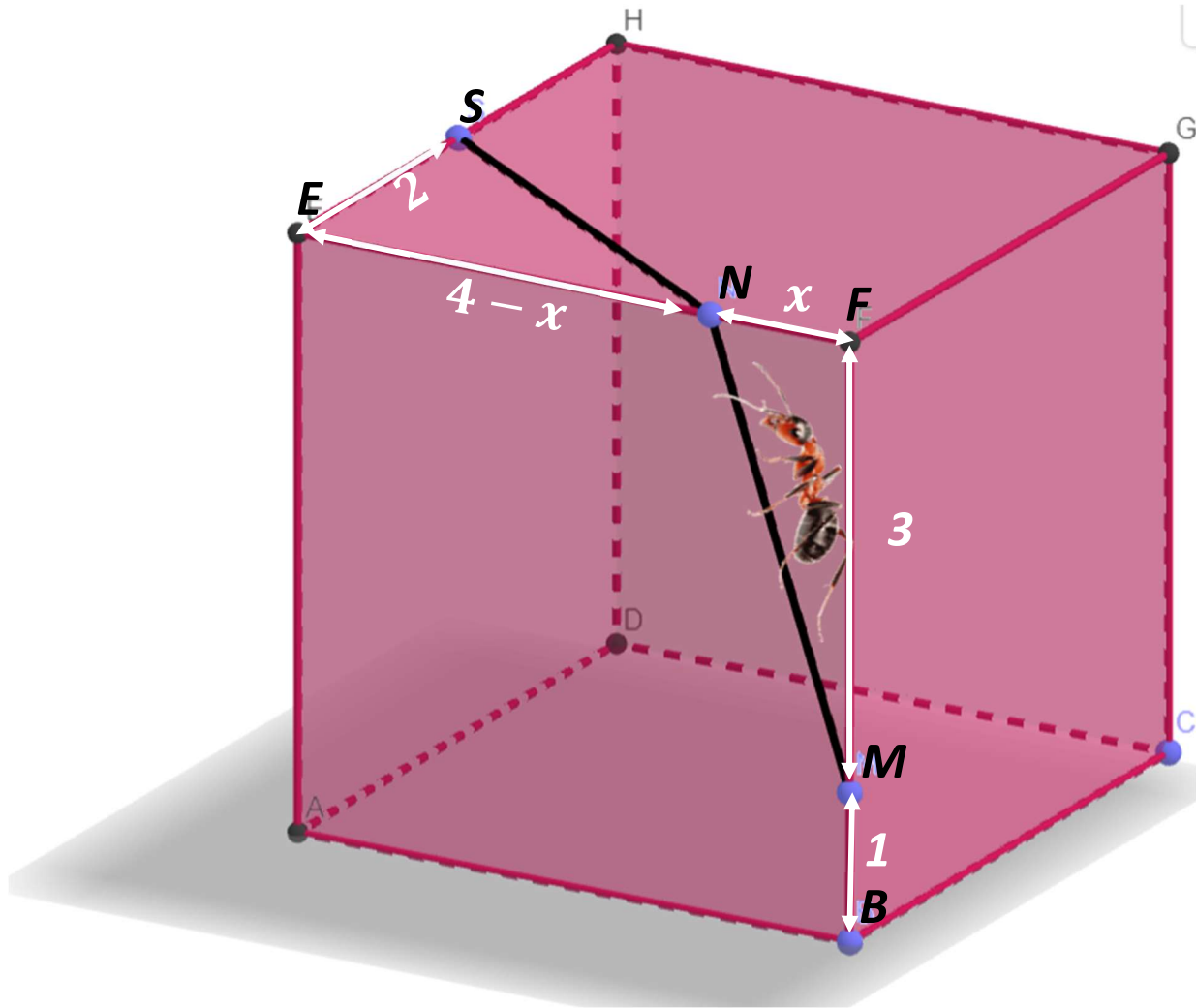


On trace la courbe d'équation $y = 20$. On détermine les coordonnées du point d'intersection des 2 courbes. On en déduit que : $f(x) = 20$ si $x \approx 13,4$
Ainsi la valeur 20 possède 1 antécédent : $x \approx 13,4$
On peut écrire aussi : $f(x) = 20$ seulement si $x \in \{13,4\}$
Ou encore : $f(x) = 20$ a comme ensemble de solutions $S = \{13,4\}$

8- Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 20$, c'est-à-dire déterminer l'intervalle des distances x , pour lesquelles la longueur de canalisation est inférieure à 20 km

On lit sur le graphe que $f(x) \leq 20$ si $x \in [0 ; 13,4]$

Problème 1 : Fourmi paresseuse



Sur un cube ABCDEFGH d'arête 4 cm, une fourmi placée en M tel que $BM = 1$ est attirée par l'odeur du sucre placée en S, milieu de $[EH]$. Paresseuse, elle se demande en quel point N traverser l'arête $[EF]$ pour que son trajet M-N-S soit le plus court possible. Quel conseil lui donner ?

On note $x = FN$.

- 1- Montrer que pour une distance x donnée, la longueur du trajet M-N-S peut être calculée en utilisant la fonction f suivante, définie pour $x \in [0 ; 4]$ par :

$$f : x \rightarrow f(x) = \sqrt{9 + x^2} + \sqrt{20 - 8x + x^2}$$

$\swarrow$ $x = \text{distance FN en km}$ $\searrow$ $f(x) = \text{longueur du trajet M-N-S}$

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle MFN, rectangle en F : $MN^2 = NF^2 + x^2 = 9 + x^2$

On a donc : $MN = \sqrt{9 + x^2}$

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle MFS, rectangle en F :

$$NS^2 = NF^2 + 2^2 = (4 - x)^2 + 2^2 = 16 - 8x + x^2 + 4 = 20 - 8x + x^2$$

On a donc : $NS = \sqrt{20 - 8x + x^2}$

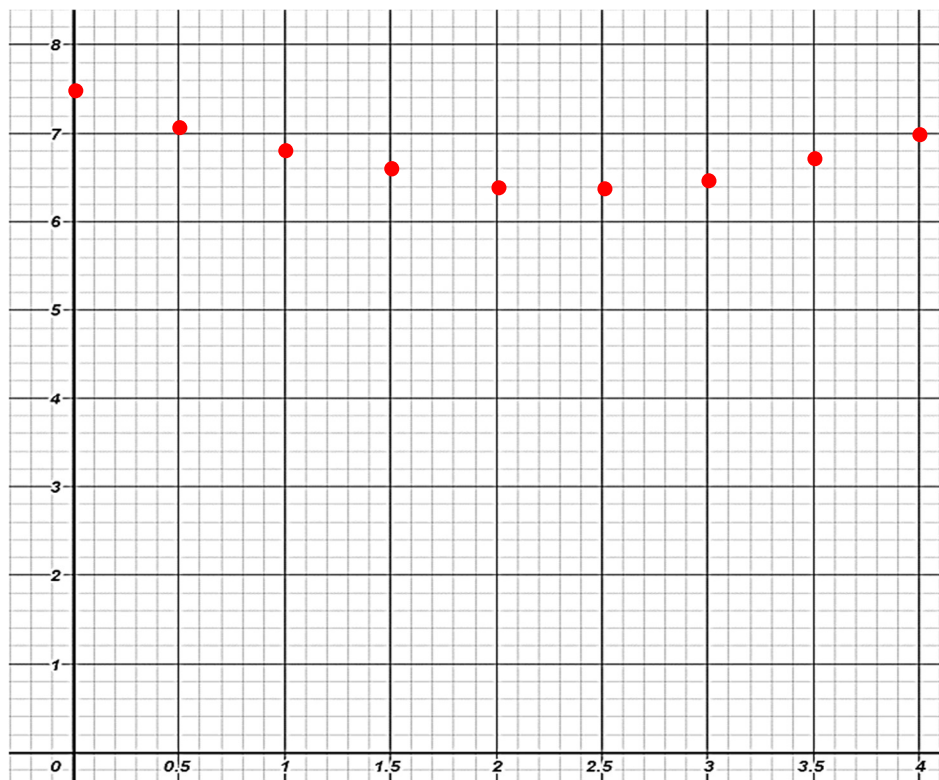
La longueur du trajet M-N-S est donc égale à $MN + NS = \sqrt{9 + x^2} + \sqrt{20 - 8x + x^2}$

2- Calculer l'image de **0** par f , c'est-à-dire la longueur du trajet M-N-S si $x = 0$ cm (arrondir au dixième).

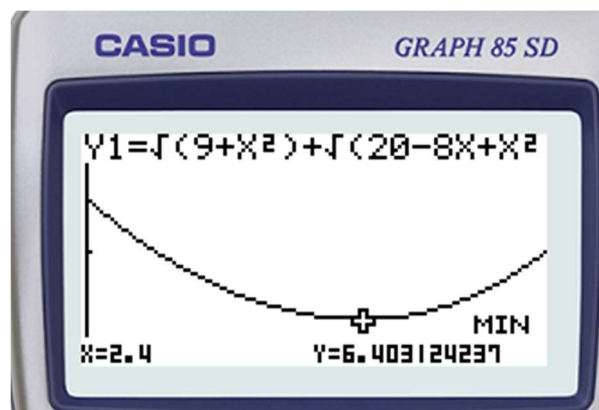
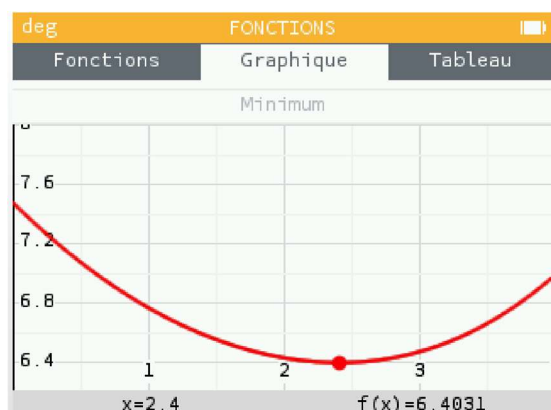
$$f(0) = \sqrt{9 + 0^2} + \sqrt{20 - 8 \times 0 + 0^2} = 7,5$$

3- Calculer les images des nombres suivants et tracer la courbe C_f représentative de la fonction f :

$f(0,5) = \sqrt{9 + 0,5^2} + \sqrt{20 - 8 \times 0,5 + 0,5^2} \approx 7,1$	$f(2,5) = \sqrt{9 + 2,5^2} + \sqrt{20 - 8 \times 2,5 + 2,5^2} \approx 6,4$
$f(1) = \sqrt{9 + 1^2} + \sqrt{20 - 8 \times 1 + 1^2} \approx 6,8$	$f(3) = \sqrt{9 + 3^2} + \sqrt{20 - 8 \times 3 + 3^2} \approx 6,5$
$f(1,5) = \sqrt{9 + 1,5^2} + \sqrt{20 - 8 \times 1,5 + 1,5^2} \approx 6,6$	$f(3,5) = \sqrt{9 + 3,5^2} + \sqrt{20 - 8 \times 3,5 + 3,5^2} \approx 6,7$
$f(2) = \sqrt{9 + 2^2} + \sqrt{20 - 8 \times 2 + 2^2} \approx 6,4$	$f(4) = \sqrt{9 + 4^2} + \sqrt{20 - 8 \times 4 + 4^2} \approx 7$



4- Tracer sur calculatrice la courbe C_f avec comme fenêtre graphique : $0 \leq x \leq 4$ et $6 \leq y \leq 8$. Déterminer (arrondie au centième), la distance x qui permet d'obtenir une longueur du trajet M-N-S minimale. Quelle est la longueur de ce trajet ?



Le minimum de la courbe est atteint pour $x = 2,4$. On a alors : $f(2,4) \approx 6,40$. Concrètement cela signifie que le trajet M-N-S est le plus court si la fourmi passe par le point N tel que $FN = 2,4$ cm. Ce trajet est alors de 6,40 cm.

- 5- Construire le tableau de variation de la fonction f (arrondir au centième les valeurs de $f(x)$)

La fonction f est **définie** sur l'intervalle $[0 ; 4]$.

Elle est **décroissante** sur l'intervalle $[0 ; 2,4]$.

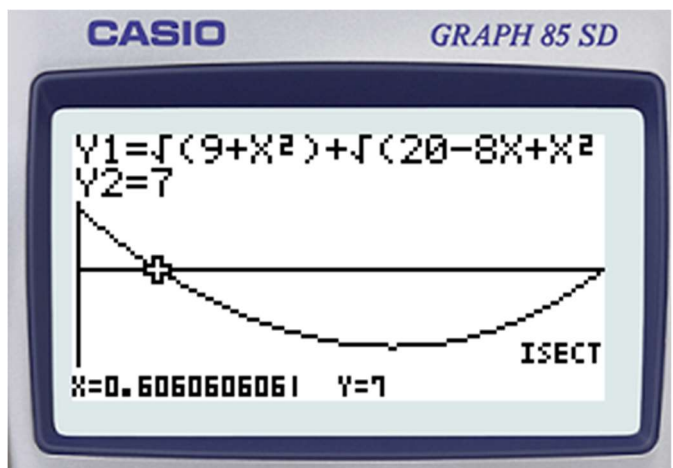
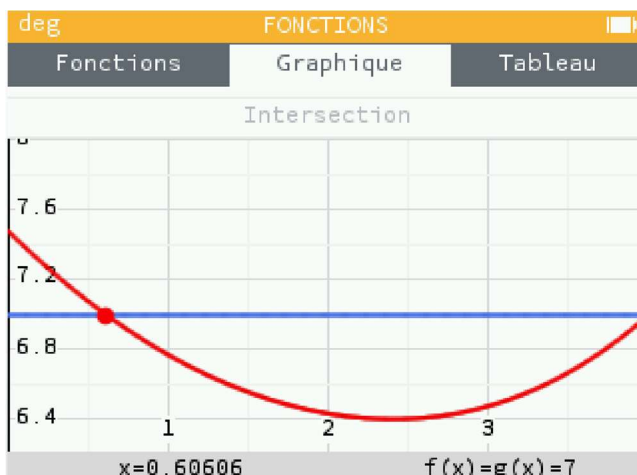
Elle est **croissante** sur l'intervalle $[2,4 ; 4]$.

x	0	2,4	4
Variations de f	7,47	6,40	7,00

- 6- Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 7$ au centième près, en utilisant la calculatrice.

On trace la courbe d'équation $y = 7$. On détermine les coordonnées des points d'intersection des 2 courbes. On en déduit que : $f(x) = 7$ si $x \approx 0,61$ ou si $x \approx 4,00$

Ainsi la valeur 7 possède 2 antécédents : $x \approx 0,61$ et si $x = 4$



- 7- Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 7$, c'est-à-dire déterminer l'intervalle des distances x , pour lesquelles la longueur du trajet M-N-S est inférieure à 7 cm

On lit sur le graphe que $f(x) \leq 7$ si $x \in [0,61 ; 4]$

- 8- Le patron d'un cube d'arête 4 cm donné ci-après. Y placer les points M et S. Tracer sur ce patron ouvert, le plus court chemin de M à S. Mesurer la longueur $FN = x$ et la longueur du chemin MS .

Comparer ces valeurs mesurées avec les valeurs déterminées en question 4.

Sur le patron ouvert, il est facile de tracer le chemin le plus court entre M et S. Il correspond à une ligne droite tracée entre les points M et S. Cette ligne croise l'arête $[EF]$ au point N. On mesure : $x \approx 2,4$ cm et $MS \approx 6,4$ cm. On retrouve ainsi les valeurs déterminées lors de la recherche du minimum de la fonction f .

