# FONCTIONS

**Problème 1** : *Consommation d'essence d'un véhicule*

Lorsqu'un véhicule roule à une vitesse $v$ comprise entre 20 km/h et 130 km/h, sa consommation d'essence peut s'exprimer en fonction de sa vitesse $v$ par :

*Consommation en litres pour 100 km de trajet* $= 0{,}06\,v + \frac{150}{v}$

Soit f la fonction définie pour $x \in [20\ ;\ 130]$ par :

$$f:\ x \to f(x) = 0{,}06\,x + \frac{150}{x}$$

*$x$ = vitesse du véhicule en km/h*

*$f(x)$ = consommation en l/100km*

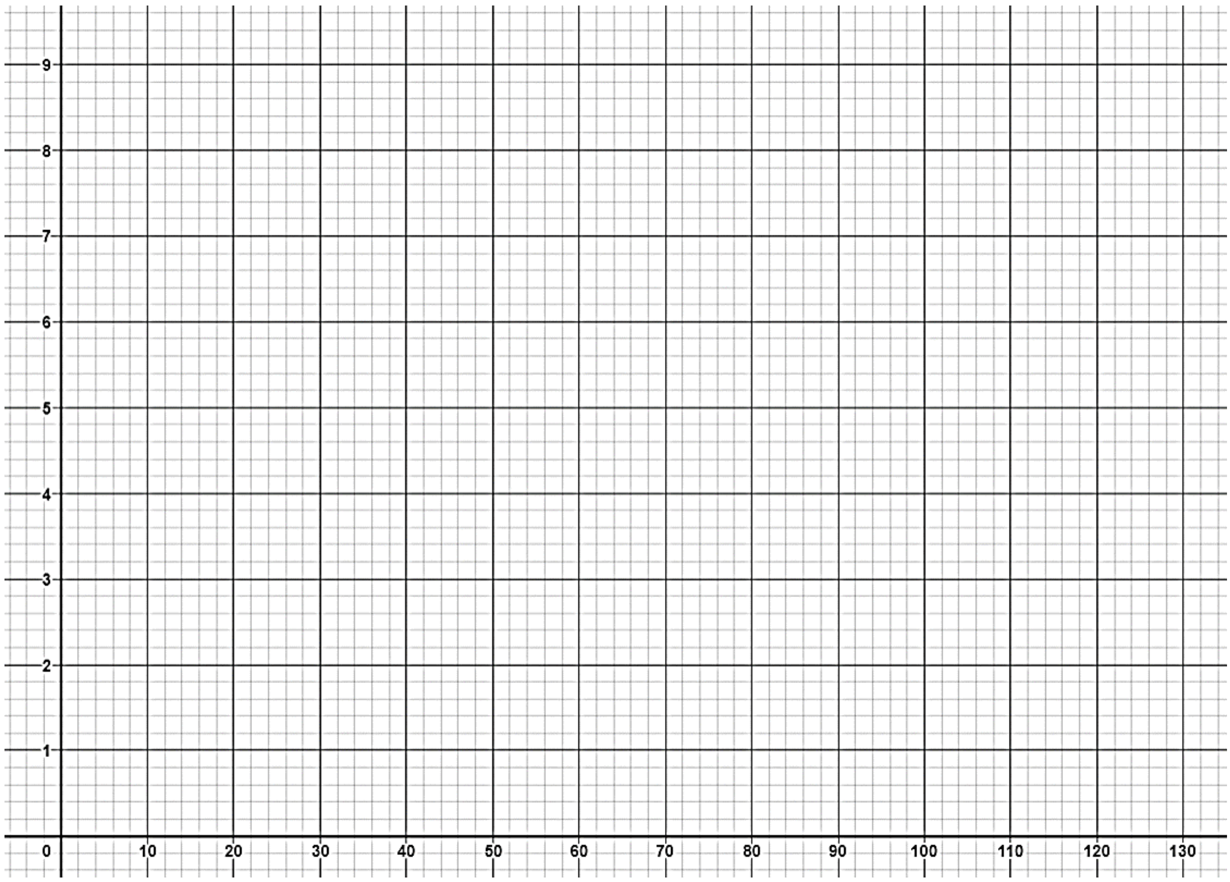
1- Calculer l'image de 20 par $f$, c'est-à-dire la consommation d'essence lorsque le véhicule roule à 20 km/h :

$$f(\mathbf{20}) = 0{,}06 \times \mathbf{20} + \frac{150}{\mathbf{20}} =$$

2- Calculer *(arrondir au dixième)* l'image de 130 *:* $f(\mathbf{130}) = 0{,}06 \times +\mathbf{130}\ \frac{150}{\mathbf{130}} =$

3- Compléter le tableau de valeur ci-dessous et tracer la courbe représentative de la fonction $f$ :

| | |
|---|---|
| $f(\mathbf{30}) = 0{,}06 \times \mathbf{30} + \frac{150}{\mathbf{30}} =$ | $f(\mathbf{80}) = 0{,}06 \times \mathbf{80} + \frac{150}{\mathbf{80}} =$ |
| $f(\mathbf{40}) = 0{,}06 \times \mathbf{40} + \frac{150}{\mathbf{40}} =$ | $f(\mathbf{90}) = 0{,}06 \times \mathbf{90} + \frac{150}{\mathbf{90}} =$ |
| $f(\mathbf{50}) = 0{,}06 \times \mathbf{50} + \frac{150}{\mathbf{50}} =$ | $f(\mathbf{100}) = 0{,}06 \times \mathbf{100} + \frac{150}{\mathbf{100}} =$ |
| $f(\mathbf{60}) = 0{,}06 \times \mathbf{60} + \frac{150}{\mathbf{60}} =$ | $f(\mathbf{110}) = 0{,}06 \times \mathbf{110} + \frac{150}{\mathbf{110}} =$ |
| $f(\mathbf{70}) = 0{,}06 \times \mathbf{70} + \frac{150}{\mathbf{70}} =$ | $f(\mathbf{120}) = 0{,}06 \times \mathbf{120} + \frac{150}{\mathbf{120}} =$ |



4- Tracer la courbe sur calculatrice pour déterminer la valeur de la vitesse qui permet d'avoir une consommation minimale (arrondie au dixième).

5- Construire le tableau de variation de la fonction $f$

6- A partir du graphique tracé question 3), résoudre l'équation $f(x) = 7$, c'est-à-dire déterminer pour quelles vitesses $x$, le véhicule consomme 7l/100km (définir $x$ avec une précision égale à l'unité- laisser les traits de construction).

7- Sur calculatrice, ajouter la fonction $g$ définie par $g(x) = 7$ . On obtient une droite horizontale à l'écran. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 7$ au dixième près, en déterminant avec la calculatrice les coordonnées des points d'intersection des courbes des fonctions $f$ et $g$ .

8- Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 7$, c'est-à-dire déterminer l'intervalle des vitesses $x$, sur lequel le véhicule consomme moins de 7l/100km

9- Résoudre l'inéquation $f(x) > 7$, c'est-à-dire déterminer l'intervalle des vitesses $x$, sur lequel le véhicule consomme plus de 7l/100km

**<u>Problème 2</u>** : *Fonction mathématique abstraite*

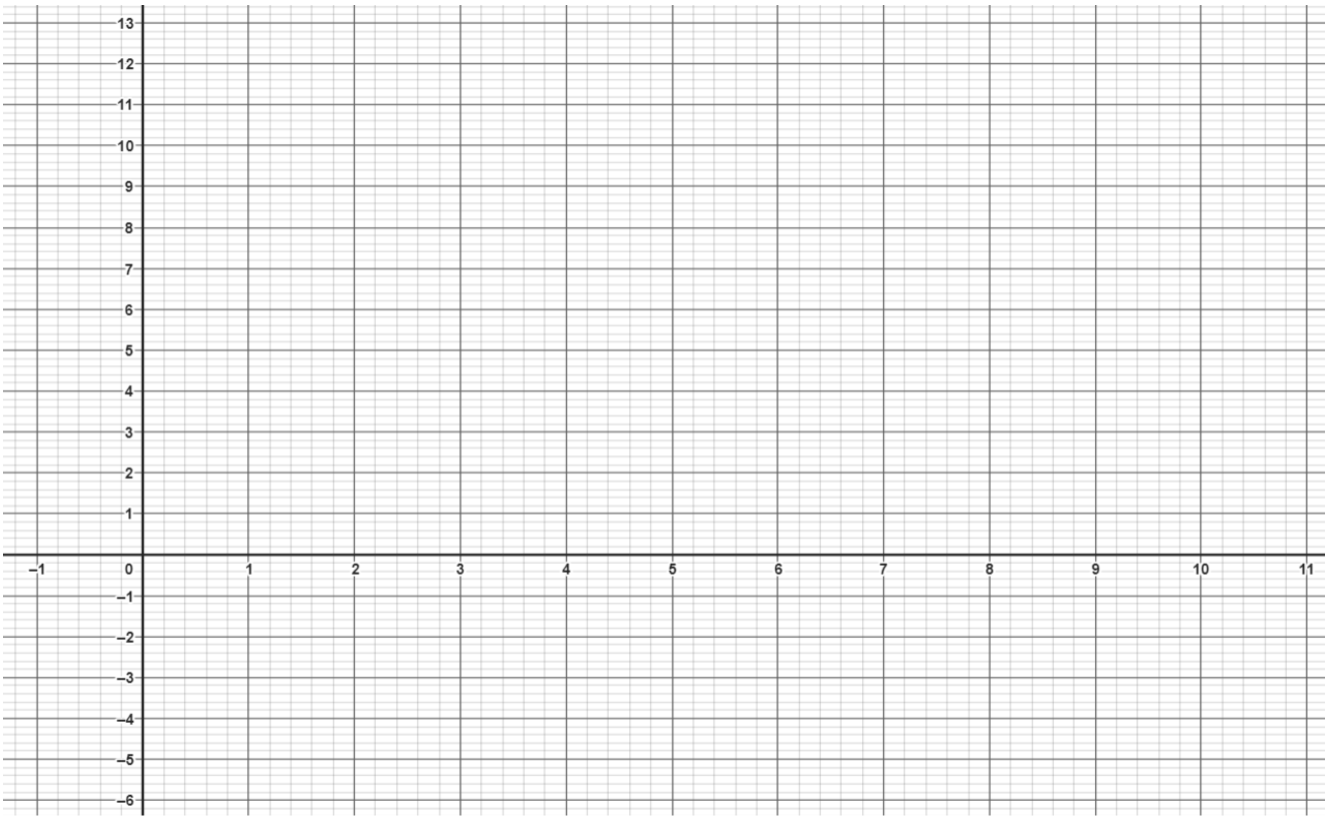
On définit la fonction : $f : \ x \ \rightarrow \ \ f(x) = x - (0{,}5\, x^2 - 4x)$ pour $x \in [-1 \ ; \ 11]$

1- Simplifier l'expression de $f(x)$ et la factoriser.

2- Remplir le tableau de valeur suivant sans donner le détail des calculs et en utilisant l'expression simplifiée de $f(x)$

| $x$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | | | | | |

3- Positionner sur le graphe ci-dessous, les 13 points calculés précédemment et tracer la courbe représentative de cette fonction $f$

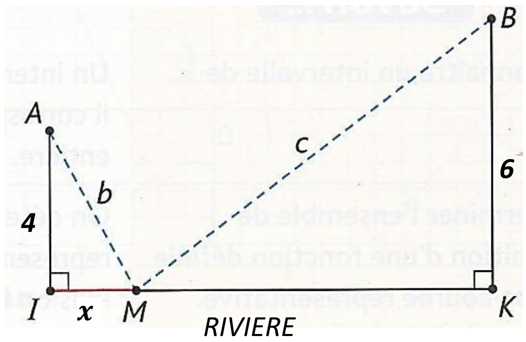



4- Tracer cette courbe sur votre calculatrice, et déterminer les coordonnées précises du point maximum.

5- Construire le tableau de variation de $f(x)$.

**<u>Problème 3</u>** : *Installation d'une canalisation*

Deux villages A et B sont situés près d'une rivière. On souhaite installer une station de pompage M sur la rivière qui permettrait d'alimenter en eau les 2 villages. La situation est schématisée par le graphique ci-contre avec AI = 4 km ; BK = 6 km ; IK = 14 km ; IM=$x$ km




On cherche à placer le point M de façon à obtenir une longueur de canalisation minimale. C'est-à-dire que l'on recherche la distance $x$ qui permette d'avoir une somme MA+MB la plus petite possible.

1- Le point M se situant entre les points I et K, dans quel intervalle doit appartenir $x$ ? Dessiner à l'échelle 1/100 000, le plan faisant apparaître les points A, I, K, B et la rivière (1 km en réalité font 1 cm sur le plan). Tracer en rouge la canalisation pour $x$ = 1 km, en vert pour $x$ = 4 km, en bleu pour $x$ = 13 km. Mesurer à la règle, les longueurs de canalisation obtenues et compléter le tableau ci-dessous :

| *Distance $x$ = IM **en km*** | *1* | *4* | *13* |
|---|---|---|---|
| *Longueur canalisation AM+MB **en km*** | | | |

2- Montrer que pour une distance $x$ donnée, la longueur de la canalisation peut être calculée en utilisant la fonction f suivante, définie pour $x \in [0 \; ; \; 14]$ par : $f : x \rightarrow f(x) = \sqrt{16 + x^2} + \sqrt{36 + (14 - x)^2}$

*$x$ = distance IM en km*   *$f(x)$ = longueur canalisation en km*

3- Calculer l'image de 1 par *f*, c'est-à-dire la longueur de la canalisation en km si $x$ = 1 km

4- Calculer l'image de 4 par *f* et de 13 par *f*. Comparer ces valeurs avec celles mesurées dans la question 1)

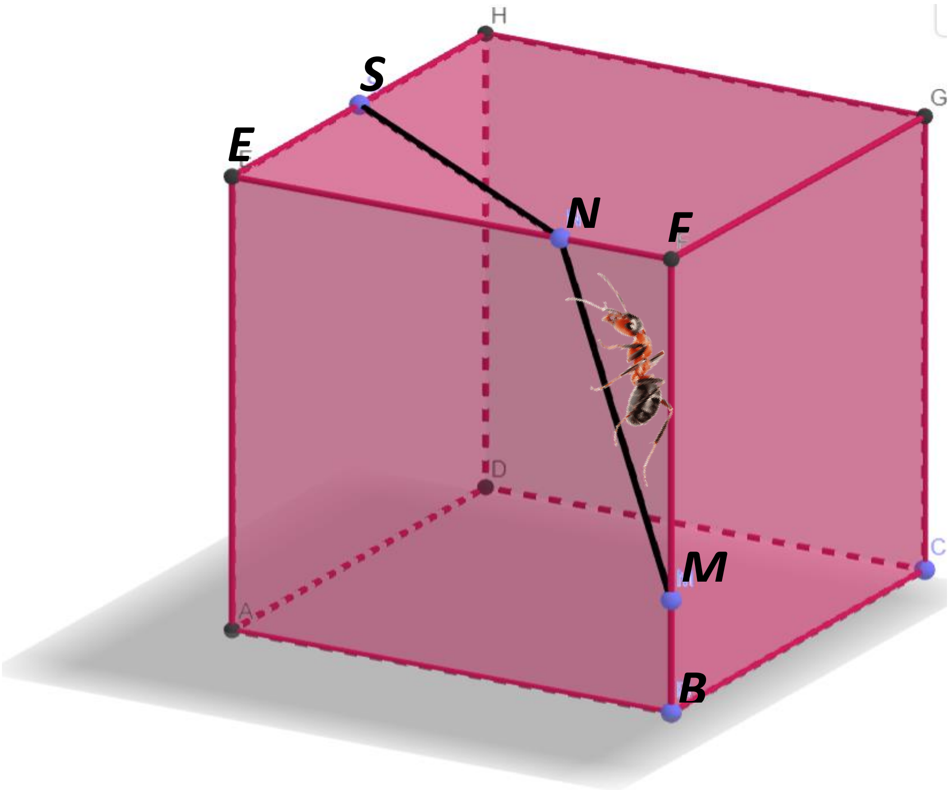
5- Soit $C_f$ la courbe représentative de la fonction *f*. Tracer sur calculatrice la courbe $C_f$ avec comme fenêtre graphique : $0 \leq x \leq 14$ et $16 \leq y \leq 21$. Déterminer (arrondie au dixième), la distance $x$ qui permet d'obtenir une longueur de canalisation minimale. Quelle est cette longueur ?

6- Construire le tableau de variation de la fonction *f* (arrondir au dixième les valeurs de $f(x)$)

7- Sur calculatrice, ajouter la fonction $g$ définie par $g(x) = 20$ . On obtient une droite horizontale à l'écran. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 20$ au dixième près, en déterminant avec la calculatrice les coordonnées des points d'intersection des courbes des fonctions $f$ et $g$ .

8- Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 20$, c'est-à-dire déterminer l'intervalle des distances $x$, pour lesquelles la longueur de canalisation est inférieure à 20 km

**Problème 4** : *Fourmi paresseuse*




Sur un cube ABCDEFGH d'arête 4 cm, une fourmi placée en M tel que BM = 1 est alléchée par l'odeur du sucre placée en S, milieu de $[EH]$. Paresseuse, elle se demande en quel point N traverser l'arête $[EF]$ pour que son trajet M-N-S soit le plus court possible. Quel conseil lui donner ?
On note $x = FN$ .

1- Montrer que pour une distance $x$ donnée, la longueur du trajet M-N-S peut être calculée en utilisant la fonction f suivante, définie pour $x \in [0\ ;\ 4]$ par : $f : x \rightarrow f(x) = \sqrt{9+x^2} + \sqrt{20-8x+x^2}$

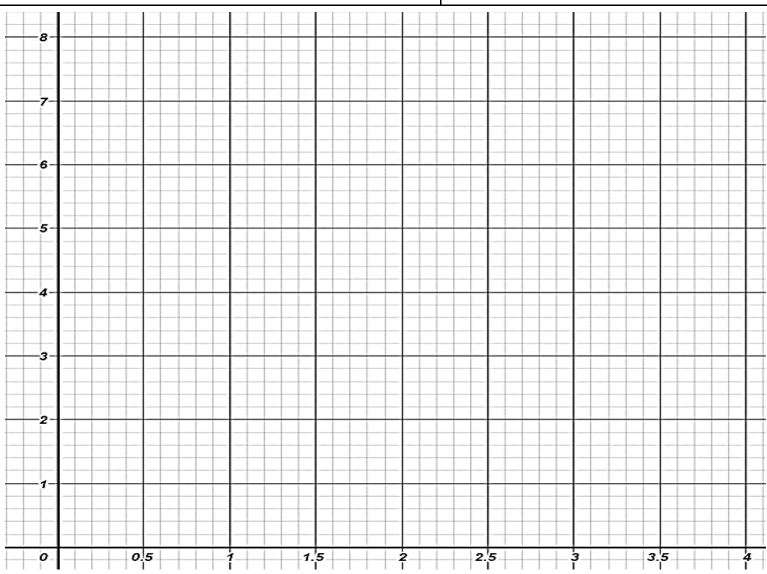
*$x$ = distance FN en km* — *$f(x)$ = longueur du trajet M-N-S*

2- Calculer l'image de **0** par $f$, c'est-à-dire la longueur du trajet M-N-S si $x$ = **0** cm (*arrondir au dixième*).

$f(\mathbf{0}) = \sqrt{9+\mathbf{0}^2} + \sqrt{20-8\times\mathbf{0}+\mathbf{0}^2} \approx$

3- Calculer les images des nombres suivants et tracer la courbe $C_f$ représentative de la fonction $f$ :

| | |
|---|---|
| $f(\mathbf{0,5}) = \sqrt{9+\mathbf{0,5}^2} + \sqrt{20-8\times\mathbf{0,5}+\mathbf{0,5}^2} \approx$ | $f(\mathbf{2,5}) = \sqrt{9+\mathbf{2,5}^2} + \sqrt{20-8\times\mathbf{2,5}+\mathbf{2,5}^2} \approx$ |
| $f(\mathbf{1}) = \sqrt{9+\mathbf{1}^2} + \sqrt{20-8\times\mathbf{1}+\mathbf{1}^2} \approx$ | $f(\mathbf{3}) = \sqrt{9+\mathbf{3}^2} + \sqrt{20-8\times\mathbf{3}+\mathbf{3}^2} \approx$ |
| $f(\mathbf{1,5}) = \sqrt{9+\mathbf{1,5}^2} + \sqrt{20-8\times\mathbf{1,5}+\mathbf{1,5}^2} \approx$ | $f(\mathbf{3,5}) = \sqrt{9+\mathbf{3,5}^2} + \sqrt{20-8\times\mathbf{3,5}+\mathbf{3,5}^2} \approx$ |
| $f(\mathbf{2}) = \sqrt{9+\mathbf{2}^2} + \sqrt{20-8\times\mathbf{2}+\mathbf{2}^2} \approx$ | $f(\mathbf{4}) = \sqrt{9+\mathbf{4}^2} + \sqrt{20-8\times\mathbf{4}+\mathbf{4}^2} \approx$ |



4- Tracer sur calculatrice la courbe $C_f$ avec comme fenêtre graphique : $0 \leq x \leq 4$ et $6 \leq y \leq 8$. Déterminer (arrondie au centième), la distance $x$ qui permet d'obtenir une longueur du trajet M-N-S minimale. Quelle est cette longueur ?

5- Construire le tableau de variation de la fonction $f$ (arrondir au centième les valeurs de $f(x)$)

6- Sur calculatrice, ajouter la fonction $g$ définie par $g(x) = 7$ . On obtient une droite horizontale à l'écran. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 7$ au centième près, en déterminant avec la calculatrice les coordonnées des points d'intersection des courbes des fonctions $f$ et $g$ .

7- Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 7$, c'est-à-dire déterminer l'intervalle des distances $x$, pour lesquelles la longueur du trajet M-N-S est inférieure à 7 cm

8- Le patron d'un cube d'arête 4 cm donné ci-après. Y placer les points M et S. Tracer sur ce patron ouvert, le plus court chemin de M à S. Mesurer la longueur $FN = x$ et la longueur du chemin $MS$.
Comparer ces valeurs mesurées avec les valeurs déterminées en question 4.