DS – Maths Seconde

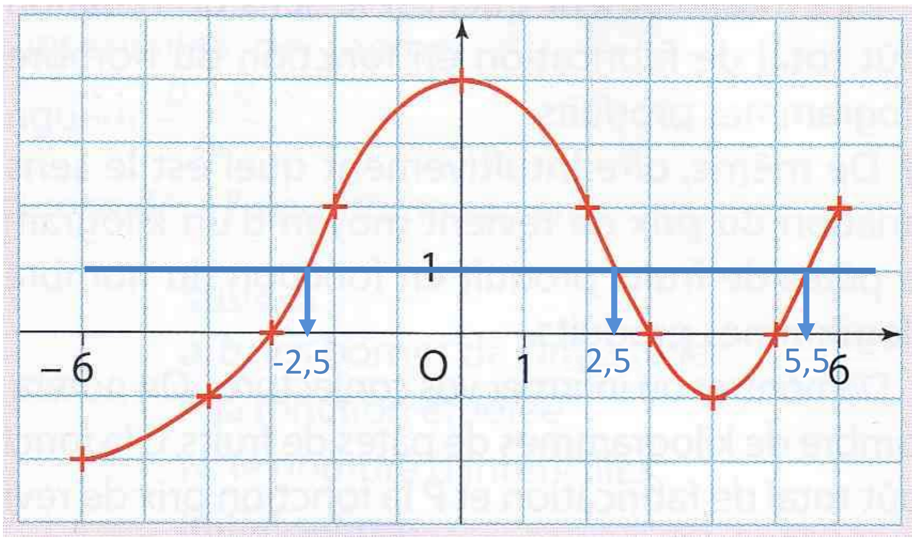
MODELISER PAR UNE FONCTION

Exercice 1 : *Une fonction f est* strictement décroissante sur $]-\infty\,;5\,]$ et strictement croissante sur $[\,5\,;\ +\infty[$. Peut-on comparer $f(2)$ et $f(4)$? Justifier en rédigeant correctement.

Les nombres 2 et 4 appartiennent à l'intervalle $]-\infty\,;5\,]$ sur lequel la fonction f est décroissante. Comme $2 < 4$ alors on peut dire que $f(2) > f(4)$, car une fonction décroissante ne respecte pas l'ordre.

Exercice 2 : *Lecture courbe*

Sur la courbe ci-contre, on donne la courbe représentative C_f d'une fonction f.



1- Donner l'intervalle qui définit l'ensemble de définition D_f de cette fonction f

Cette fonction est définie pour les valeurs de $x \in [-6\,;6]$. L'ensemble de définition est l'intervalle $[-6\,;6]$.

2- Donner le tableau de variation de f .

x	-6	0	4	6
Variations de f	-2 ↗	4 ↘	-1 ↗	2

3- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$. Tracer les traits de construction sur la figure.

$f(x) = 1$ si $x = -2{,}5$ ou si $x = 2{,}5$ ou si $x = 5{,}5$. L'ensemble des solutions est $S = \{-2{,}5\,;\ 2{,}5\ ;5{,}5\}$

4- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) > 1$. Colorier la portion de courbe concernée et colorier sur l'axe des abscisses, les zones dans lesquelles on a les solutions.

$f(x) \geq 1$ si $x \in\ ]-2{,}5\ ;\ 2{,}5\,[\ \cup\ ]\,5{,}5\ ;\ 6\,]$

5- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq 2$

$f(x) \leq 2$ si $x \in [-6\ ;\ -2] \cup [2\ ;\ 6]$

Exercice 3 : *Le tableau de variation d'une fonction f est le suivant :*

x	-3	1	$1{,}5$	$2{,}8$	3	4	5	6
$f(x)$	0	2	$f(1{,}5)$	$f(2{,}8)$	-5	$f(4)$	$f(5)$	0

1- Comparer, si possible, les valeurs de $f(1{,}5)$ et de $f(2{,}8)$. Justifier.

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[1\ ;\ 3]$. Comme $1{,}5 < 2{,}8$, on peut affirmer que $f(1{,}5) > f(2{,}8)$ car une fonction décroissante ne conserve pas l'ordre des valeurs.

2- Comparer, si possible, les valeurs de $f(4)$ et de $f(5)$. Justifier.

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[3\ ;\ 6]$. Comme $4 < 5$, on peut affirmer que $f(4) < f(5)$ car une fonction croissante conserve l'ordre des valeurs.

3- Comparer, si possible, les valeurs de $f(-1)$ et de $f(4)$. Justifier.

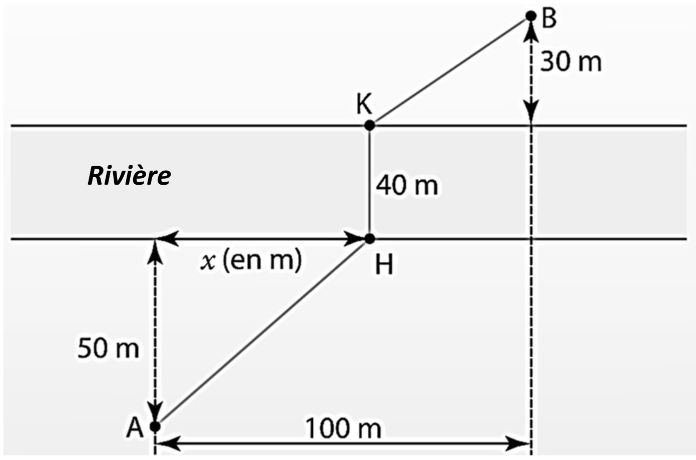
On voit sur le tableau que f est croissante sur l'intervalle $[-3\ ;\ 1]$ et que $f(-3) = 0$. Comme -1 appartient à cet intervalle, on peut dire que $f(-1) > f(-3)$ et donc $f(-1) > 0$

De même on voit que f est croissante sur l'intervalle $[3\ ;\ 6]$ et que $f(6) = 0$. Comme 4 appartient à cet intervalle, on peut dire que $f(4) < f(6)$ et donc $f(4) < 0$.

Finalement, comme $f(-1) > 0$ et $f(4) < 0$, on peut dire que $f(4) < f(-1)$

Problème : *Construction d'un pont*

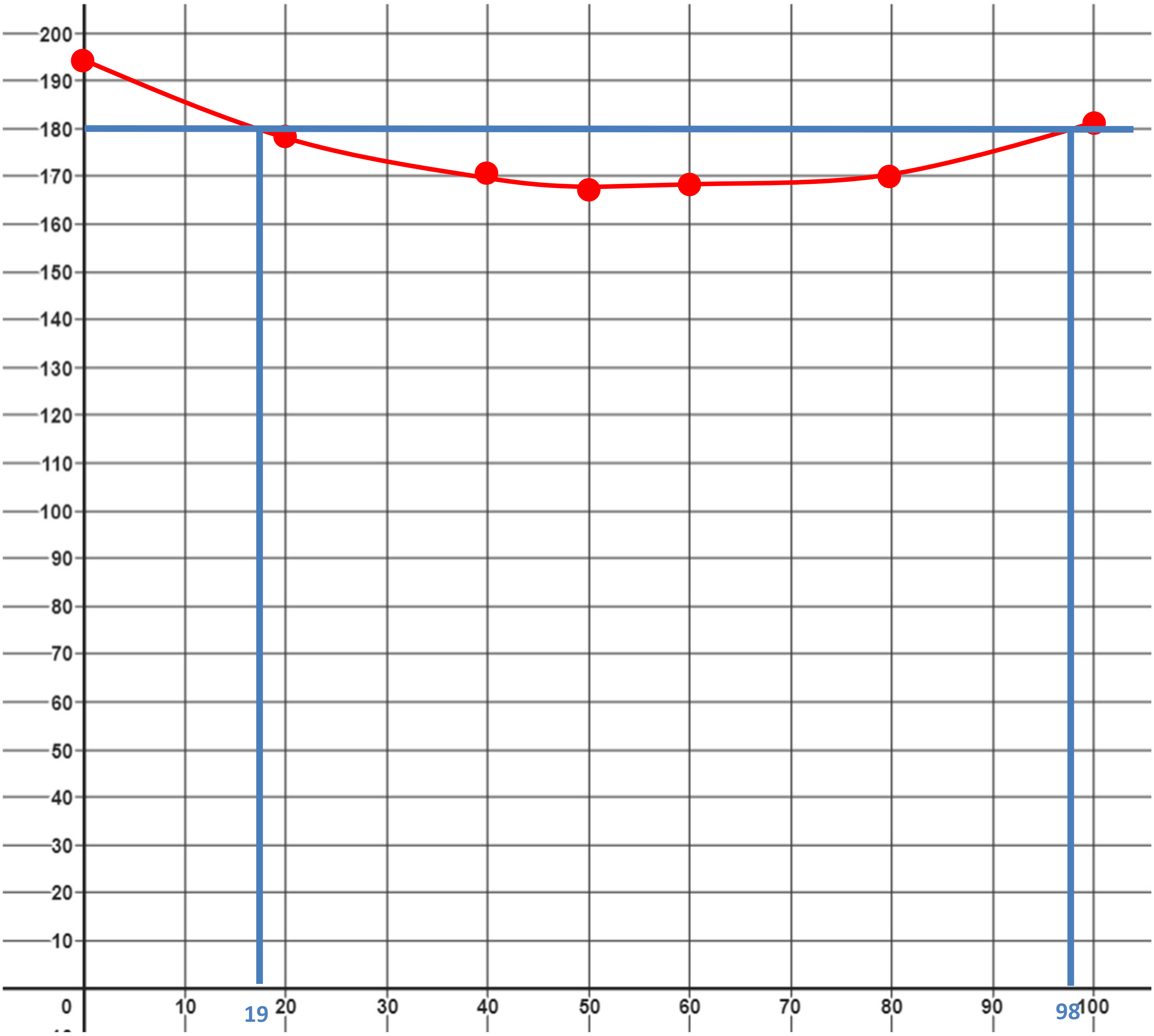
On souhaite placer un pont [HK], perpendiculaire aux berges d'une rivière, pour que le trajet de A à B soit le plus petit possible. On recherche ainsi la longueur x qui permette d'obtenir une distance AH + HK + KB minimale.



Pour faciliter cette recherche, on donne la fonction f définie par : $f(x) = AH + HK + KB$ pour $x \in [0\ ;\ 100]$

On peut montrer que $\boldsymbol{f(x)} = \sqrt{\mathbf{2500} + \boldsymbol{x}^2} \quad + \quad \mathbf{40} \ + \ \sqrt{\boldsymbol{x}^2 - \mathbf{200}\boldsymbol{x} + \mathbf{10900}}$

1) Calculer **en donnant le détail du calcul** : $f(0)$, $f(50)$ et $f(100)$ avec une précision au dixième. Placer sur le graphe ci-après, les points de la courbe C_f , d'abscisses 0, 50 et 100.



$f(\mathbf{0}) = \sqrt{2500 + \mathbf{0}^2} + 40 + \sqrt{\mathbf{0}^2 - 200 \times \mathbf{0} + 10900} \approx 194{,}4$

$f(\mathbf{50}) = \sqrt{2500 + \mathbf{50}^2} + 40 + \sqrt{\mathbf{50}^2 - 200 \times \mathbf{50} + 10900} \approx 169{,}0$

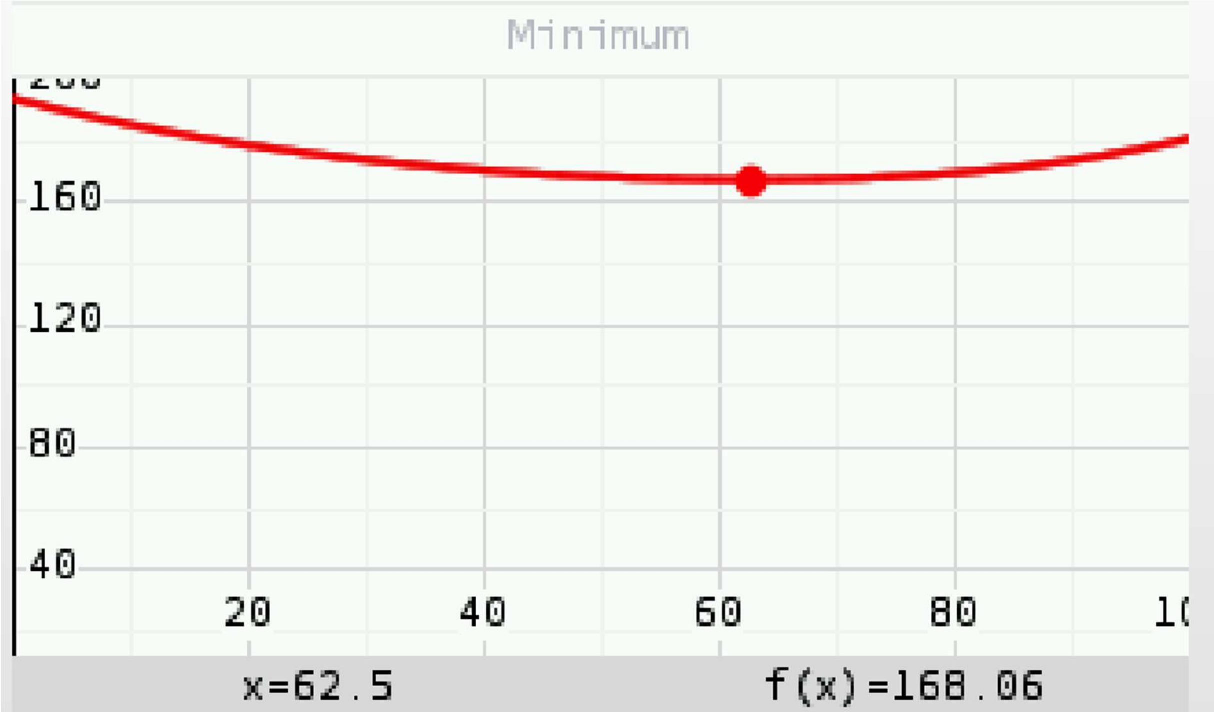
$f(\mathbf{100}) = \sqrt{2500 + \mathbf{100}^2} + 40 + \sqrt{\mathbf{100}^2 - 200 \times \mathbf{100} + 10900} \approx 181{,}8$

2) Tracer sur calculatrice la courbe C_f avec comme fenêtre graphique : $0 \leq x \leq 100$ et $-10 \leq y \leq 200$.

Déterminer (arrondie au dixième), la distance x qui permet d'obtenir une longueur du trajet A-H-K-B minimale.

Quelle est cette longueur ?

Le minimum de la courbe est atteint pour $x = 62{,}5$. On a alors : $f(62{,}5) \approx 168{,}06$. Concrètement cela signifie que le trajet A-H-K-B est le plus court si le pont est construit sur la position définie par $x = 62{,}5$ m. Ce trajet est alors de 168,06 m.

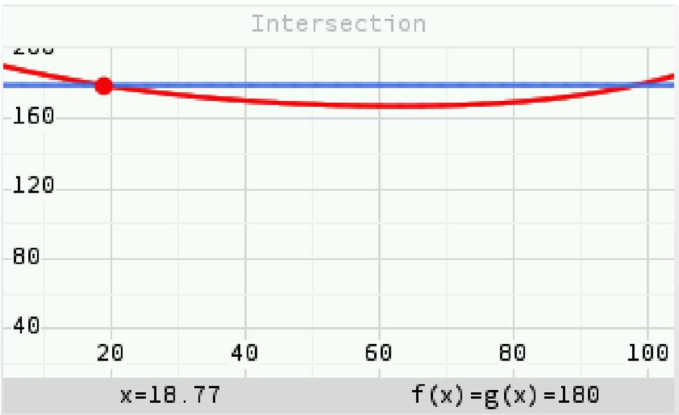


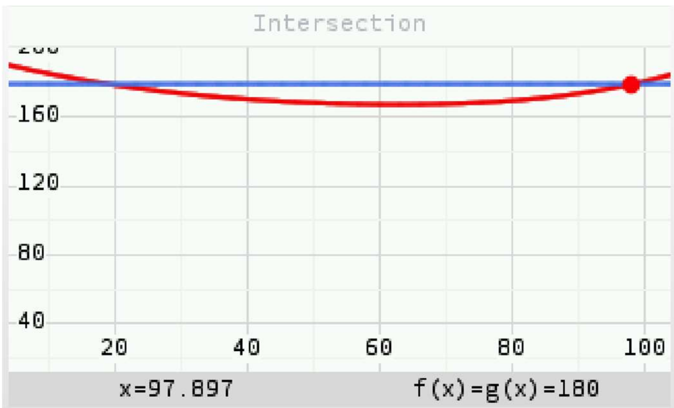
3) **En utilisant la calculatrice**, compléter le tableau de valeur ci-dessous (arrondies au dixième) et placer les points correspondants de la courbe sur le graphe précédent.

x	0	20	40	60	80	100
$f(x)$	194,4	179,3	171,11	168,1	170,4	181,5

4) Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = 180$ en réalisant les tracés sur la courbe précédente.
On réalise la construction graphique ci-dessus. On en déduit que $f(x) = 180$ si $x \approx 19$ ou $x \approx 98$. On peut donc écrire que l'ensemble de solution de cette équation est $S = \{19\,;98\ \}$.

5) Déterminer à présent les solutions de l'équation $f(x) = 180$ au dixième près, en utilisant la calculatrice.
Sur calculatrice, on trace la droite de la fonction définie par $g(x) = 180$. On recherche les points d'intersection de la courbe C_f et de cette droite :





On peut donner les solution de l'équation $f(x) = 180$ au dixième près : $S = \{18{,}8 \ ; \ 97{,}9\ \}$

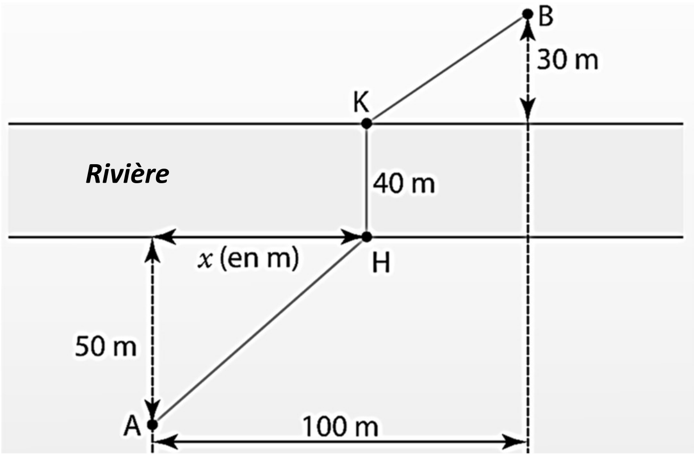
6) Résoudre l'inéquation $f(x) > 180$.
$f(x) > 180$ si $x \in [0\ ;\ 18{,}8[\ \cup\ ]97{,}9\ ;\ 100]$

7) Démontrer que l'expression de f est bien : $f(x) = \sqrt{2500 + x^2} + 40 + \sqrt{x^2 - 200x + 1000}$

On applique le théorème de Pythagore sur le triangle rectangle dont l'hypoténuse est le segment [AH] :

$$AH^2 = 50^2 + x^2 = 2500 + x^2$$

On a donc : $AH = \sqrt{2500 + x^2}$



On applique le théorème de Pythagore sur le triangle rectangle dont l'hypoténuse est le segment [KB] :

$$KB^2 = (100 - x)^2 + 30^2 = (100 - x)(100 - x) + 900$$
$$= 10000 - 100x - 100x + x^2 + 900$$
$$= 10900 - 200x + x^2$$

On a donc : $KB = \sqrt{x^2 - 200x + 10900}$

La longueur du trajet A-H-K-B est donc égale à :

$$AH + HK + KB = \sqrt{2500 + x^2} + 40 + \sqrt{x^2 - 200x + 10900}$$

Finalement on peut bien dire que :

$$f(x) = \sqrt{2500 + x^2} + 40 + \sqrt{x^2 - 200x + 1000}$$