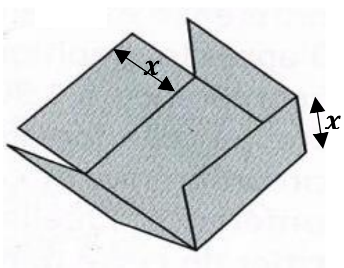
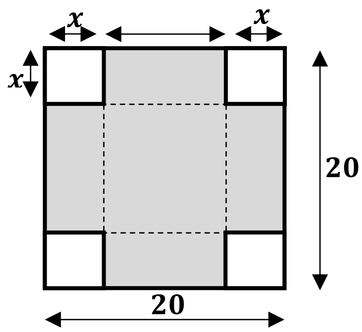
Chapitre 5 - Modéliser par une fonction

1- <u>Exemple :</u> Construction d'une boite



On veut fabriquer une boite parallélépipédique de hauteur x à partir d'une feuille de carton de 20 cm sur 20 cm. Cette boite servira d'emballage pour recevoir du sucre en poudre.

<u>Question</u> : Pour quelle hauteur x , le volume de la boite sera maximal ?



<u>Méthode utilisée</u> :

- On détermine une formule qui donne le volume en fonction de x :

$$V = x\,(20 - 2x)^2$$

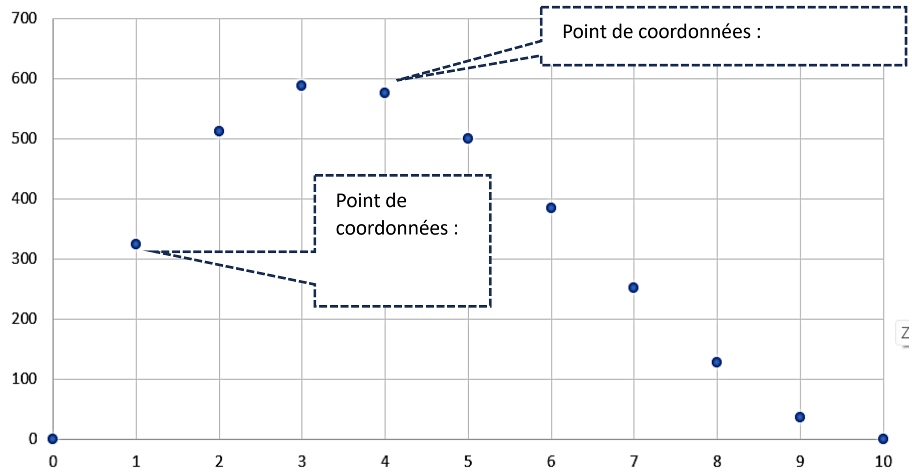
- Pour étudier l'évolution de ce volume en fonction de x, on invente une fonction que l'on définit ici par :

$$f : x \to f(x) = x\,(20 - 2x)^2$$

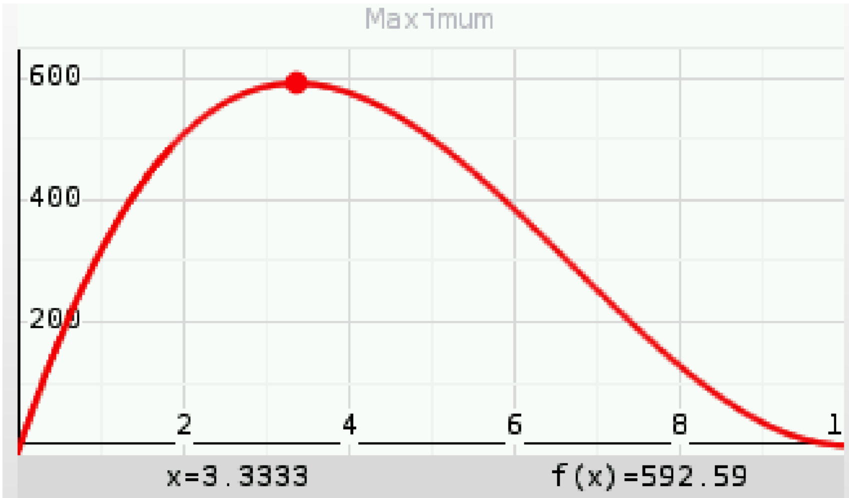
- On utilise cette formule pour calculer à la main, les images pour différentes valeurs de x :

x	Détail du calcul de $f(x)$	Résultat du calcul de $f(x)$
0	$f(0) = 0 \times (20 - 2 \times 0)^2 = 0 \times 20^2$	$f(0) = 0$
1	$f(1) = 1 \times (20 - 2 \times 1)^2 = 1 \times 18^2$	$f(1) = 324$
2	$f(2) = 2 \times (20 - 2 \times 2)^2 = 2 \times 16^2$	$f(2) = 512$
3	$f(3) = 3 \times (20 - 2 \times 3)^2 = 3 \times 14^2$	$f(3) = 588$
4	$f(4) = 4 \times (20 - 2 \times 4)^2 = 4 \times 12^2$	$f(4) = 576$
5	$f(5) = 5 \times (20 - 2 \times 5)^2 = 5 \times 10^2$	$f(5) = 500$
6	$f(6) = 6 \times (20 - 2 \times 6)^2 = 6 \times 8^2$	$f(6) = 384$
7	$f(7) = 7 \times (20 - 2 \times 7)^2 = 7 \times 6^2$	$f(7) = 252$
8	$f(8) = 8 \times (20 - 2 \times 8)^2 = 8 \times 4^2$	$f(8) = 128$
9	$f(9) = 9 \times (20 - 2 \times 9)^2 = 9 \times 2^2$	$f(9) = 36$
10	$f(10) = 10 \times (20 - 2 \times 10)^2 = 10 \times 0^2$	$f(10) = 0$

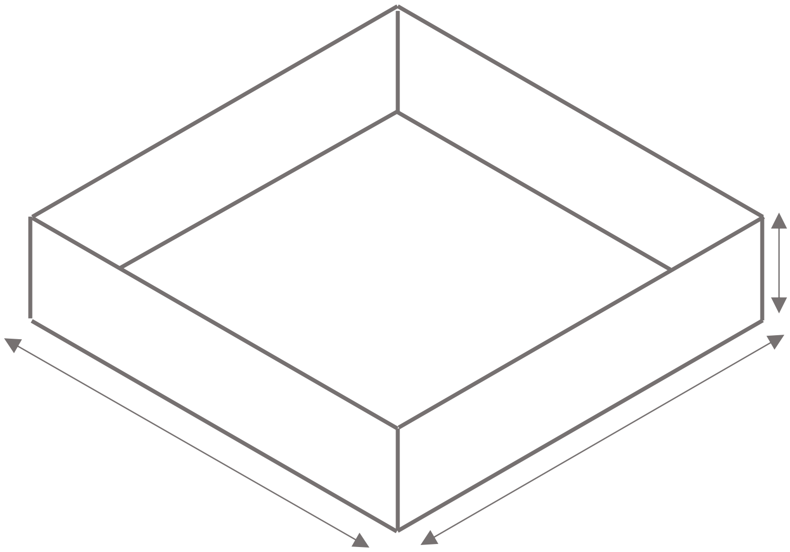
- On trace la courbe représentative de cette fonction :



- Le nombre de points tracés est insuffisant et nous permet pas de déterminer avec certitude la hauteur x pour laquelle le volume est maximal. On utilise le module graphique d'une calculatrice pour y arriver.
  En utilisant la fonctionnalité MAX de la calculatrice, on détermine avec une bonne précision, la hauteur x qui permet d'avoir une valeur $f(x)$ maximale.



- On conclut :
  « La boite fabriquée à partir d'une feuille carrée de 20 cm de côté, aura un volume maximal pour une hauteur $\boldsymbol{x \approx 3,3333 = \frac{10}{3}}$ ***» .***



Ce volume est alors égal à $f(\frac{10}{3})$:

$$f\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{10}{3} \times \left(20 - 2 \times \frac{10}{3}\right)^2$$

$$=$$

$$=$$

Point Cours :

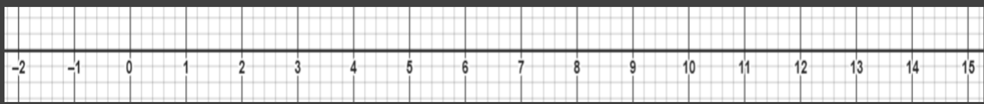
- **Définition d'une fonction** : Une fonction f permet d'associer un nombre x à un autre nombre, noté $f(x)$:

$$f : x \rightarrow f(x)$$

x est appelé

$f(x)$ est appelé

- **Ensemble de définition** : Dans la plupart des cas, une fonction f n'est définie que pour certaines valeurs de x . Par exemple, pour la fonction précédente qui donne le volume de la boite, l'ensemble de définition correspond à tous les nombres compris entre 0 et 10 :



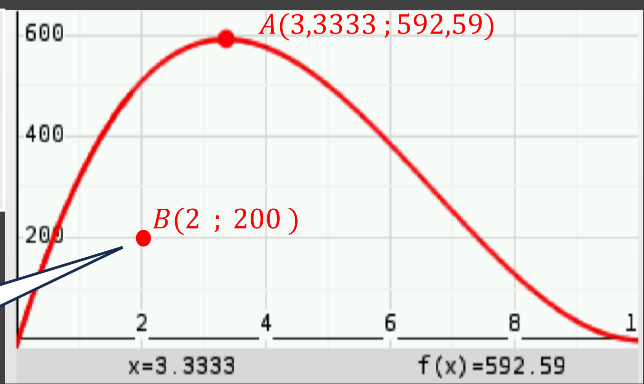
On écrit « *f est définie pour* $0 \leq x \leq 10$ »

Ou

« *L'ensemble de définition de f est l'intervalle* $[0 ; 10]$ »

- **Courbe représentative d'une fonction** :

La courbe est l'ensemble des points du plan, qui ont leurs coordonnées (x, y) qui sont telles que : $y = f(x)$

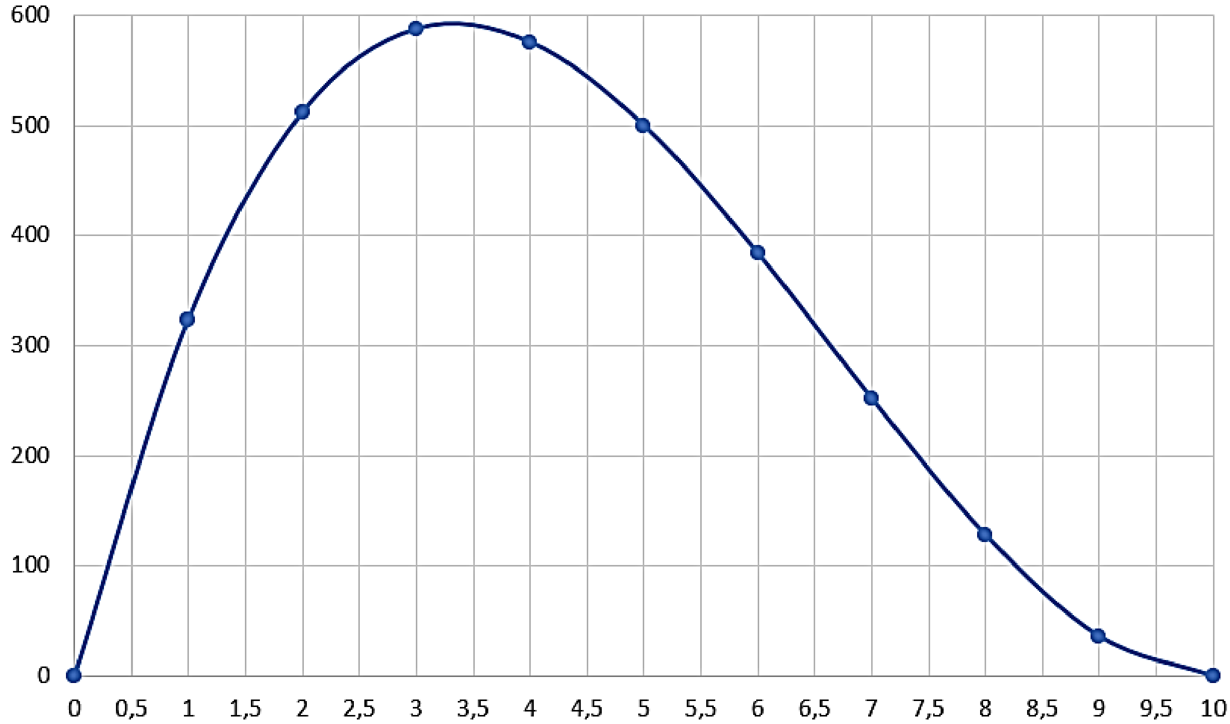


2- EQUATIONS RESOLUES GRAPHIQUEMENT :

Enoncé : Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par $f(x) = x\ (20 - 2x)^2$. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 400$.

Méthode utilisée : Résoudre cette équation, consiste à déterminer graphiquement la ou les valeurs de x comprises entre 0 et 10 et qui permettent d'avoir $f(x) = 400$.

On peut déterminer les solutions en réalisant la construction graphique suivante :



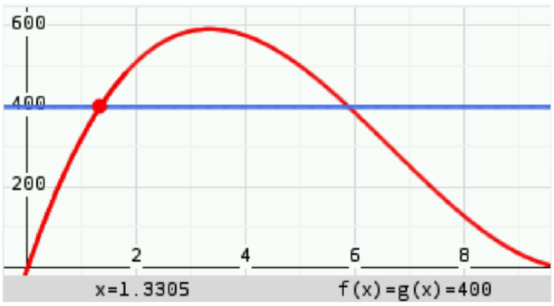
On identifie deux valeurs de x pour lesquelles on a $f(x) = 400$:

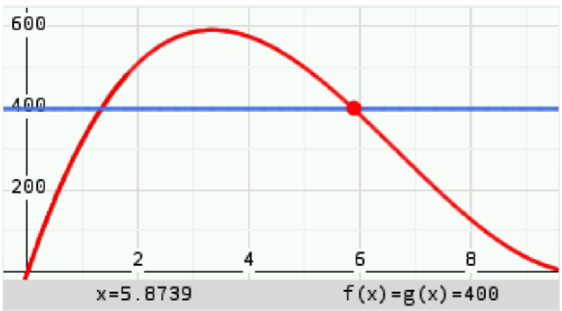
On peut écrire le résultat de plusieurs façons :

- $f(x) = 400$ si

- L'ensemble S des solutions de l'équation $f(x) = 400$ est

On peut déterminer la valeur de ces solutions de manière plus précise en utilisant sa calculatrice. On y trace la courbe de la fonction f et celle d'une autre fonction g définie par $g(x) = 400$. On retrouve ainsi sur calculatrice, le tracé précédent. En utilisant la fonctionnalité ***Intersection*** de votre calculatrice, vous obtenez les coordonnées des points d'intersection des deux courbes :





Ainsi, on peut donner l'ensemble des solutions de cette équation avec une précision à 0,0001 près :

L'ensemble S des solutions de l'équation $f(x) = 400$ est

3- EQUATIONS RESOLUES ALGEBRIQUEMENT :

Enoncé : Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[\ 0\ ;10\ ]$ par $f(x) = x\ (20 - 2x)^2$. Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = 0$:

Méthode utilisée : Résoudre cette équation, consiste à déterminer les valeurs de x comprises entre 0 et 10 et qui permettent d'avoir $f(x) = 0$ et donc $x\ (20 - 2x)^2 = 0$.

Point Cours :

L'équation $x\ (20 - 2x)^2 = 0$ est ce que l'on appelle une

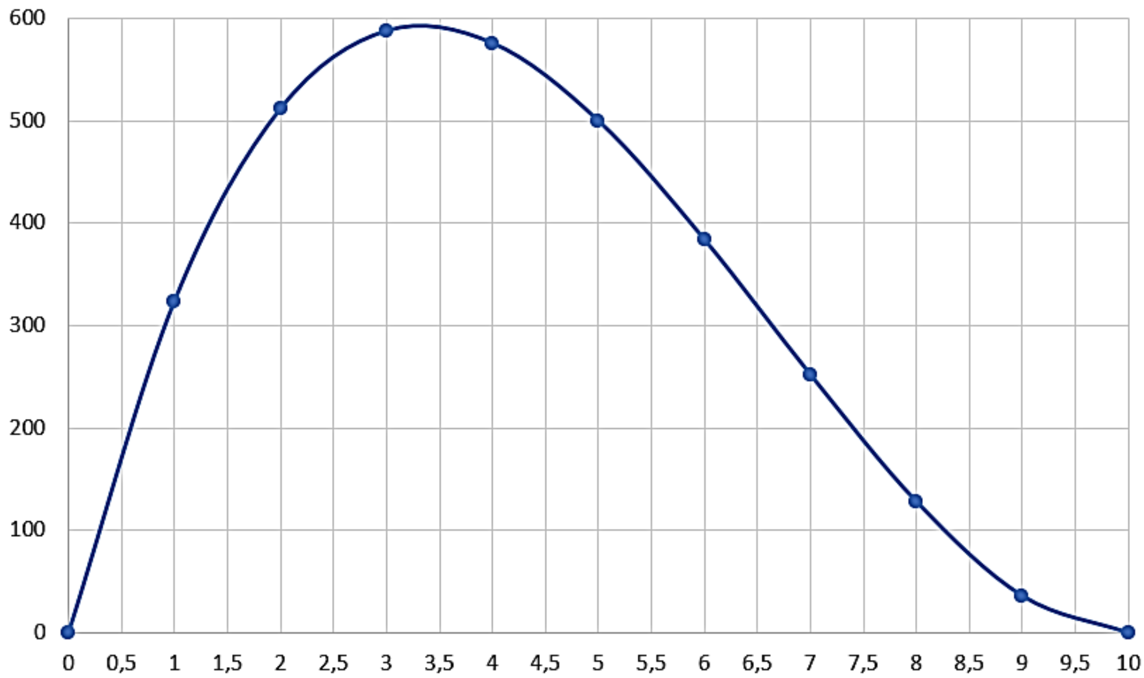
Ce type d'équation se présente sous la forme d'un produit de plusieurs facteurs dont le résultat est égal à 0. Ce produit ne peut être nul que si au-moins un des facteurs est nul. On peut donc écrire :

4- INEQUATIONS RESOLUES GRAPHIQUEMENT :

Enoncé : Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[\ 0\ ;10\ ]$ par $f(x) = x\ (20 - 2x)^2$. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 400$.

Méthode utilisée : Résoudre cette équation, consiste à déterminer graphiquement les valeurs de x comprises entre 0 et 10 et qui permettent d'avoir $f(x) > 400$.

On peut déterminer les solutions en réalisant la construction graphique suivante :



On peut écrire le résultat de plusieurs façons :

- $f(x) > 400$ si

- L'ensemble S des solutions de l'équation $f(x) > 400$ est

- L'ensemble S des solutions de l'équation $f(x) < 400$ est

Point Cours :

- Résoudre une équation $f(x) = 400$, veut dire chercher toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 400$.

- Résoudre une inéquation $f(x) < 400$, veut dire chercher toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x) < 400$.

- Pour définir l'ensemble des solutions, il y a plusieurs écritures :
  - Pour un nombre fini de valeurs : $x \in \{x_1 \; ; \; x_2 \; ; \; x_3 \; ; \ldots\}$
  - Pour un nombre infini de valeurs, comprises entre 2 nombres a et b par exemple, on peut écrire :
    - $a \leq x \leq b$ ou bien $x \in [a \; ; \; b]$
    - $a < x < b$ ou bien $x \in]a \; ; \; b[$
    - $a < x \leq b$ ou bien $x \in]a \, ; b]$
    - $a < x \leq b$ ou $c < x < d$ ce qui est pareil d'écrire

      $x \in]a \, ; b] \cup]c \, ; d[$

$]a \, ; b]$

6- Sens de variations d'une fonction :

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[\,0\,;10\,]$ par $f(x) = x\,(20-2x)^2$.

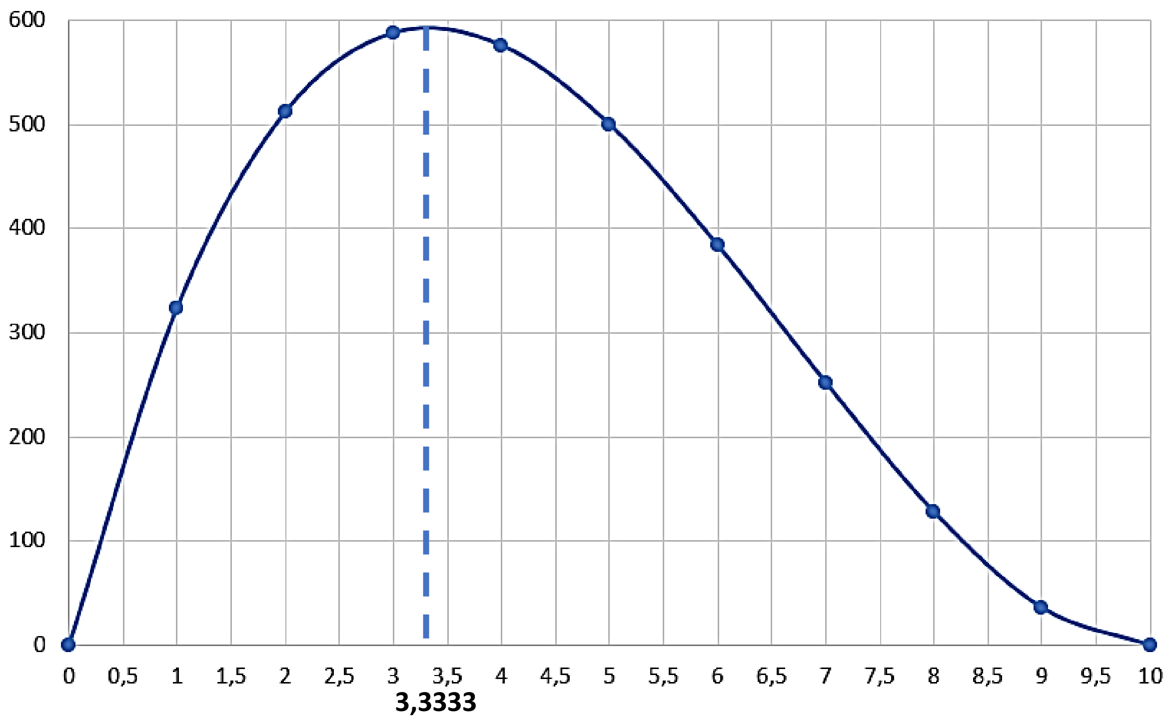
On a vu précédemment, que le maximum de cette fonction est atteint pour $x \approx 3{,}3333$.

On a alors $f(x) \approx 592{,}59$.

Point Cours :

- Si en augmentant la valeur de x dans un intervalle, la valeur de $f(x)$ augmente aussi, on dit que la fonction f est **croissante** sur cet intervalle.
  Mathématiquement cela se traduit par :
  Si lorsque $b > a$, on a $f(b) > f(a)$ alors f est croissante

- Si en augmentant la valeur de x dans un intervalle, la valeur de $f(x)$ diminue, on dit que la fonction f est dé**croissante** sur cet intervalle .
  Mathématiquement cela se traduit par :
  Si lorsque $b > a$, on a $f(b) < f(a)$ alors f est décroissante



Sur l'intervalle $[0 \quad ; \quad 3{,}3333]$	Sur l'intervalle $[3{,}3333 \quad ; \quad 10]$
On a : On constate que : Donc la fonction f est sur l'intervalle	On a : On constate que : Donc la fonction f est sur l'intervalle

On peut tracer ce que l'on appelle un tableau de variation de la fonction f . Cela permet de repérer les variations de f ainsi que les valeurs minimales et maximales de $f(x)$:
