TD – Ciel

LOI NORMALE

EXERCICE 1 : *Masse d'une pièce*

Un atelier d'assemblage de matériel informatique s'approvisionne en pièces d'un certain modèle.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans un lot important, associe sa masse en grammes. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi Normale de moyenne $\mu = 500$ et d'écart-type $\sigma = 4$.

Les résultats approchés demandés dans la suite sont à arrondir à 10^{-2}.

1. Soit C_f la représentation graphique de la fonction de densité f de cette loi Normale. Tracer C_f sur l'intervalle [486 ; 514] en prenant comme unité graphique : 2 cm pour 4 grammes
2. Sans utiliser de calculatrice, calculer les probabilités suivantes. Justifier en utilisant les propriétés 1, 2, 3 x σ.
   a) $p(496 < X < 504)$
   b) $p(X < 500)$
   c) $p(X > 508)$
3. En utilisant la calculatrice, donner la probabilité que la pièce prélevée au hasard ait une masse comprise entre 496 et 498 g. Nommer la procédure utilisée sur la calculatrice. Cette probabilité correspond à une aire sous la courbe de $\mathrm{C_f}$. Colorier cette aire sur la courbe tracée.

EXERCICE 2 : La taille des hommes

On note X la variable aléatoire qui à chaque homme prélevé au hasard dans les étudiants d'un campus associe sa taille en cm. On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 178$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

1) Tracer approximativement (1cm pour 10cm de taille - ne pas utiliser de calculatrice), sur l'intervalle [148 ; 208], la courbe C_f représentative de la fonction de densité de cette loi.
2) Donner sans utiliser de calculatrice, mais en justifiant rapidement (par rapport aux intervalles +σ, +2σ et +3σ), les probabilités suivantes :
   a) p(X < 178)
   b) p(168 < X < 188)
   c) p(X < 188)
   d) p(158 < X < 198)
3) Calculer en utilisant une calculatrice les probabilités suivantes à 10^{-3} près.
   a) p (X < 160)
   b) p(X > 180)
   c)

EXERCICE 3 : Une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(25 ; 2)$.

a) Donner l'expression $f(x)$ de la fonction de densité. Représenter cette loi par une courbe sur un intervalle $[\mu - 3\sigma ; \mu + 3\sigma]$
b) Calculer sans calculatrice : $p(X > 23)$ et $p(21 < X < 23)$
c) Calculer avec calculatrice : $p(24.5 < X < 25.5)$ et $p(X > 28)$

EXERCICE 4 : Loi Normale

Une entreprise produit en grande quantité des pièces détachées destinées à l'industrie.
L'objectif de cet exercice est d'étudier l'exploitation de divers outils mathématiques pour analyser la qualité de cette production.

Une pièce est conforme lorsque sa longueur, exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle [74,4 ; 75,6].
On note *L* la variable aléatoire qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans la production, associe sa longueur. On suppose que la variable aléatoire *L* suit la loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,25.

1. Soit C_f la représentation graphique de la fonction de densité f de cette loi Normale. Tracer C_f sur l'intervalle [74 ; 76] en prenant comme unité graphique : 2 cm pour 0.25 mm
2. Calculer p(74.4 < L < 75.6) . Hachurer sur la courbe précédente l'aire correspondante.
3. Quelle valeur doit-on donner à h pour avoir p(75 – h < L < 75 + h) = 0.95

Exercice 5

Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite. Calculer les probabilités suivantes :

$P(X < 1,2)$ $P(-0,5 < X < 0,5)$

$P(X > 0,8)$

Exercice 6

Une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 12 et d'écart-type 0,3. Calculer les probabilités suivantes :

$P(X < 11)$ $P(11,5 < X < 12,5)$ et

$P(X > 12,4)$

Exercice 7

Une machine fabrique des résistors. La variable aléatoire X associe à chaque résistor sa résistance exprimée en ohms X suit la loi normale d'espérance 80 et d'écart-type 2.

On prélève un résistor au hasard.

1. Calculer la probabilité que sa résistance soit inférieur à 80,5.
2. Un résistor est conforme si sa résistance est comprise entre 79,85 et 80,15. Quelle est la probabilité que le résistor soit conforme ?
3. Déterminer le réel h tel que 95 % des résistors aient une résistance comprise entre $80 - h$ et $80 + h$.

Exercice 8

Une machine fabrique des tiges métalliques dont la longueur en mm suit la loi normale d'espérance 100 et d'écart-type 0,15.

Dans quel intervalle doit se situer la longueur des tiges si on veut qu'au plus 1 % des tiges aient une longueur n'appartenant pas à cet intervalle ?

Exercice 9

Une fabrique de desserts glacés produit des cônes à la vanille. On note X la variable aléatoire qui à chaque cône associe la masse en gramme de glace qu'il contient.

On suppose que X suit la loi normale d'espérance 100 et d'écart-type $2\sqrt{2}$.

A quel intervalle doit appartenir la masse si on veut qu'au plus 5 % des cônes aient une masse n'appartenant pas à cet intervalle ?

Loi binomiale et loi normale

Exercice 10

Un atelier produit des pièces dont 20 % sont d'excellente qualité. On prélève successivement au hasard 200 pièces dans la production.

On note X le nombre de pièces excellentes dans le lot.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. On décide d'approcher X par une loi normale.

a. Quels sont les paramètres de cette loi ?

b. Calculer la probabilité que le pourcentage de pièces excellentes dans le lot soit supérieur à 25 %.

Exercice 11

Des rondelles sont commercialisées par lots de 1000. On prélève au hasard un lot de 1000 dans un dépôt de l'usine. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 1 000 rondelles. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 1 000 rondelles, associe le nombre de rondelles non conformes parmi ces 1 000 rondelles.

1. Quelle est loi de probabilité de X ?
2. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par une loi normale d'espérance 20 et d'écart-type 4,43. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 20 et d'écart-type 4,43.

a. Justifier les paramètres de cette loi normale.

b. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 15 rondelles non conformes dans le lot de 10000 rondelles, c'est-à-dire $P(Z \leq 15,5)$.

Faire le point avec un QCM

Exercice 12

Indiquer la bonne réponse :

1. Si X suit la loi normale de paramètres 25 et 0,3, Alors 95 % au moins des valeurs sont dans :

a) $[24,4;25,6]$

b) $[24,7;25,3]$

c) $[24,1;25,9]$

d) $[24;26]$

2. La loi binomiale de paramètres 150 et 0.08 peut être approchée par une loi normale :
   a) d'espérance 150 et d'écart-type 25,2511
   b) d'espérance 12 et d'écart-type 3,323
   c) d'espérance 12 et d'écart-type 3
   d) c'est Impossible.
3. Si X suit la loi uniforme sur $[2,8]$ alors $E(X) =$
   a) 10 b) 4 c) 4.5 d) 5
4. Si X suit la loi uniforme sur $[2,8]$ alors $P(3 < X < 6)$ vaut :
   a) 0.3 b) 0.5 c) 0.25
   d) aucune des réponses.

Entraînement à l'examen

Exercice 13

On s'intéresse à un chantier de construction d'un tronçon de TGV. Les travaux de terrassement nécessitent la mise à disposition d'une flotte importante de pelles sur chenilles et de camions-benne.

La réalisation de l'ouvrage nécessite de grandes quantités de bétons.

Les résultats approchés seront arrondis à 10^{-3}.

A. Loi normale

On note X la variable aléatoire qui, à chaque pelle prélevée au hasard dans la flotte, associe le nombre de m^3 de matériaux extraits pendant la première heure de chantier. On suppose que X suit la loi normale d'espérance 120 et d'écart-type 10.

1. Calculer $P(110 \le X \le 130)$.
2. Calculer la probabilité que la pelle prélevée extraie moins de 100 m3 pendant sa première heure du chantier.

B. Loi normale

On note E l'évènement « un camion-benne pris au hasard dans la flotte n'a pas de panne ou de sinistre pendant le premier mois du chantier ».

On suppose que la probabilité de E est 0,9. On prélève au hasard 10 camions-benne dans la flotte pour les affecter à une zone de chantier. Le nombre de camions-benne de la flotte est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 camions-benne.

On note Y la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de ce type, associe le nombre de camions-benne n'ayant pas eu de panne ou de sinistre pendant le premier mois de chantier.

1. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucun des 10 camions-benne n'ait de panne ou de sinistre pendant le premier mois de chantier.