Chapitre 17 - Lois de densité

En théorie des probabilités, une variable aléatoire à densité est une variable aléatoire réelle pour laquelle la probabilité d'appartenance à un domaine se calcule à l'aide d'une intégrale sur ce domaine.

On voit dans ce chapitre, les lois de densité ***uniforme***, ***normale*** et ***exponentielle***. Chacune d'elle est adaptée à une situation concrète bien particulière que l'on définira.

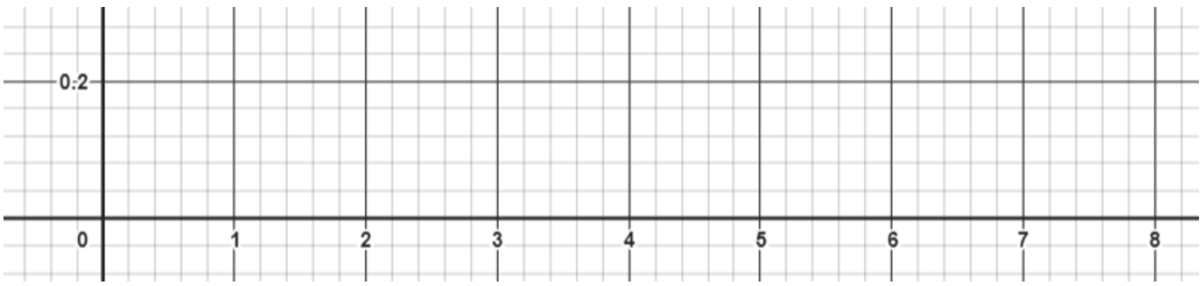
1- Loi uniforme :

a. Exemple :

Chaque fois qu'il effectue une opération élémentaire, un ordinateur d'un type donné a un temps de réponse en nanosecondes qui suit une loi uniforme $\mathcal{U}(2\,;7)$.

1- Quelle probabilité $p(2 < X < 7)$ a cet ordinateur d'avoir un temps de réponse compris entre 2 et 7 nanosecondes.
2- Quelle probabilité $p(5 < X < 5{,}1)$ a cet ordinateur d'avoir un temps de réponse compris entre 5 et 5,1 nanosecondes.
3- Quelle est le temps de réponse moyen ? Si l'ordinateur effectue 1 000 000 opérations élémentaires, combien de temps cela va-t-il prendre ?

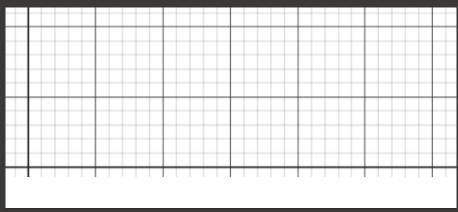
Réponses : La variable aléatoire X suit ici une



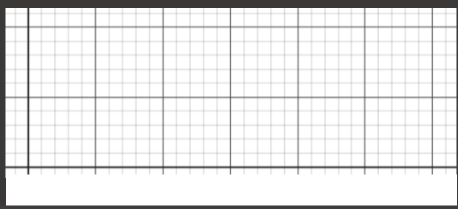
b. DEFINITION ET PROPRIETE :

Définition : Une loi de probabilité X peut être discrète ou continue. Elle est discrète lorsque X ne prend que des valeurs . Elle est lorsque X prend des valeurs réelles.

Fonction de densité f quelconque :



Fonction de densité f UNIFORME $\mathcal{U}(A, B)$:

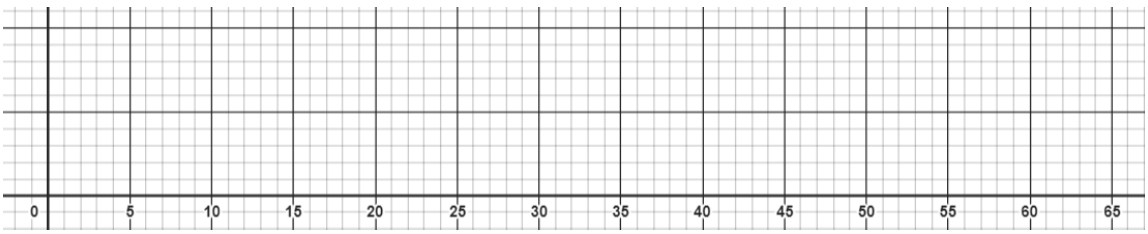


Espérance de X : L'espérance d'une variable aléatoire X est la valeur de X .

Propriété : Pour une loi uniforme $\mathcal{U}(A, B)$, l'espérance de X est :

c. APPLICATION :

Le standard téléphonique d'un grand magasin limite la durée d'attente en transférant le plus vite possible les appels sur d'autres postes. On s'intéresse aux appels dont la durée d'attente est comprise entre 10 secondes et 1 minute. On note X la variable aléatoire qui, à tel appel pris au hasard, associe la durée d'attente. On admet que X suit la loi uniforme sur l'intervalle [10 ; 60].
Déterminer les probabilités suivantes : $p(A)$ où A est l'évènement « la durée d'attente pour un appel pris au hasard est inférieure à 20 s », $p(X > 40)$ et $p(X < 60)$.



2- Loi normale :

a. Domaine d'application :

En théorie des probabilités et en statistique, les lois normales sont parmi les lois de probabilité les plus utilisées pour modéliser des phénomènes naturels issus de plusieurs événements aléatoires.

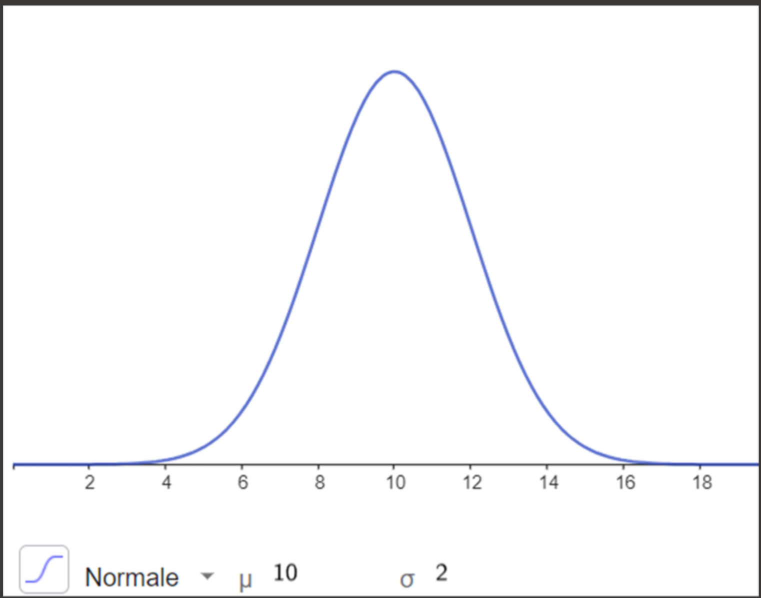
La loi normale est une loi continue qui dépend de deux paramètres : la moyenne μ et l'écart-type σ .

b. Fonction de densite et calcul de probabilite:

Fonction de densité : La fonction de densité d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,,\sigma)$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

Courbe représentative de f :

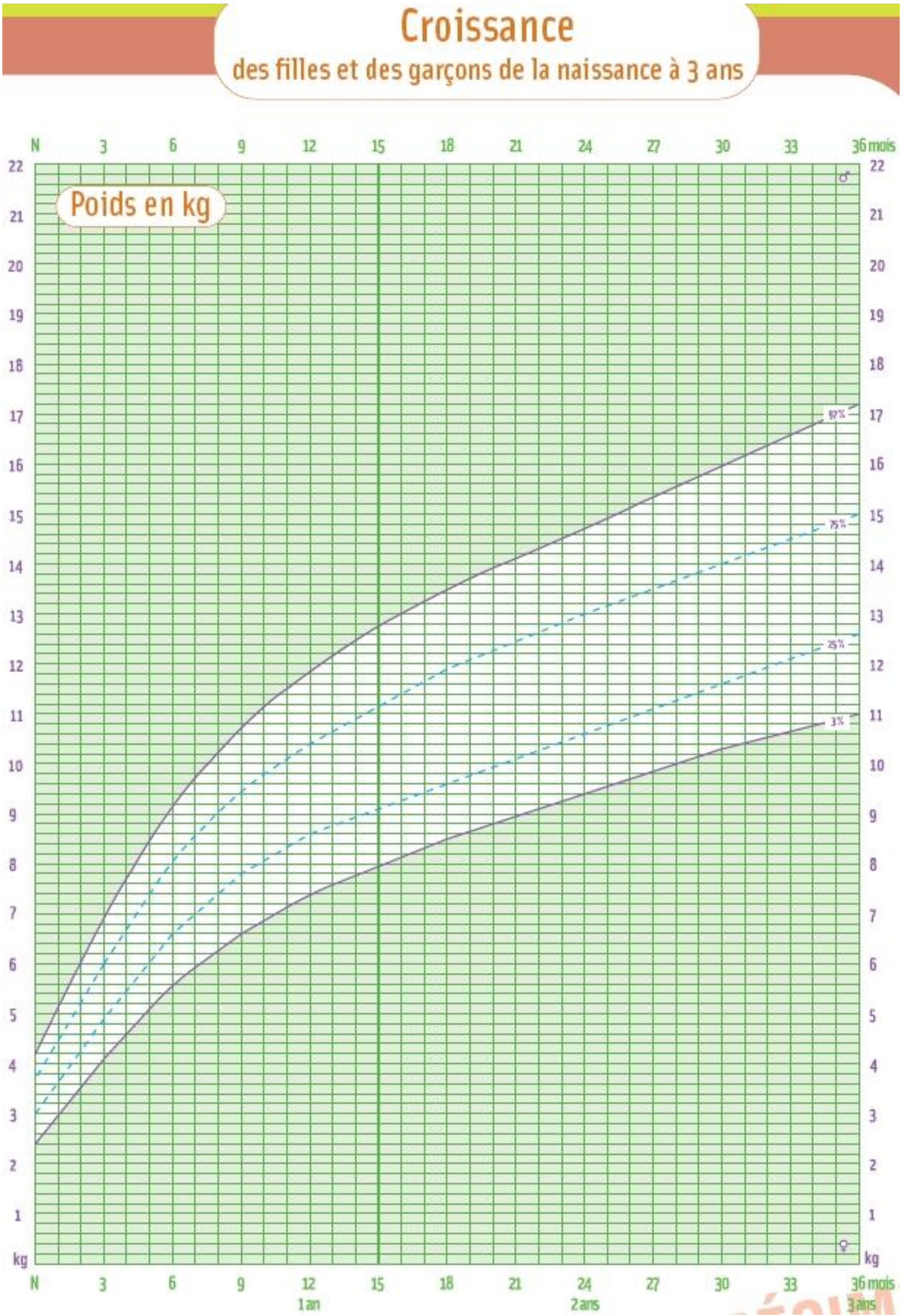


Probabilité : Si X est une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,,\sigma)$, si a et b sont des nombres réelles quelconques :

$$p(a < X < b) = \int_a^b f(x).\,dx$$

c. Exemple :

On retrouve dans les carnets de santé des enfants, la courbe de poids de la naissance à 3 ans :

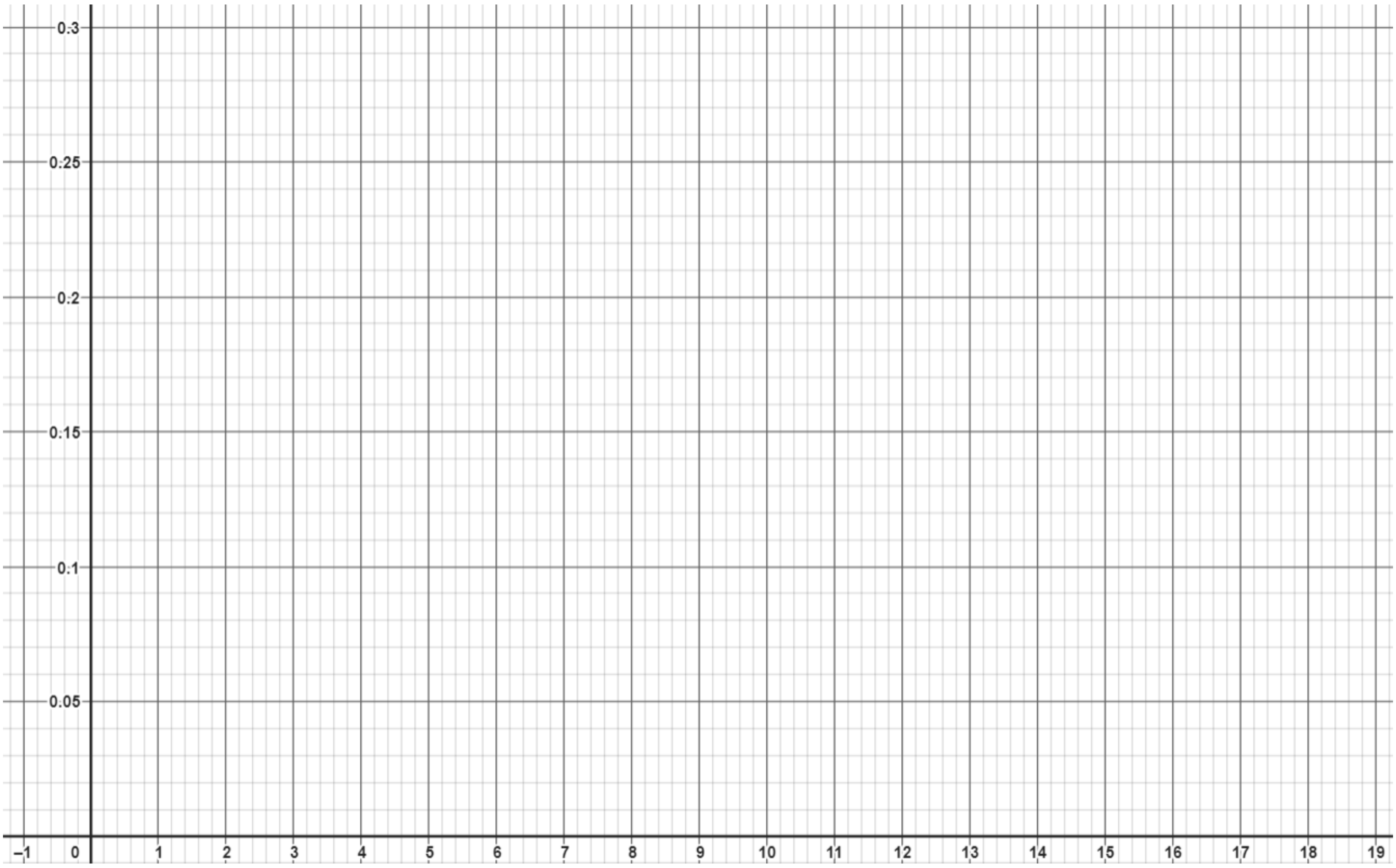


On relève sur cette courbe, que pour un enfant de 36 mois, le poids moyen est de $\mu = 14\ kg$ et que l'écart-type est de $\sigma = 1{,}5\ kg$.

On définit l'expérience aléatoire suivante : « *On tire au sort dans la population des enfants de 36 mois, un enfant. On le pèse et on note X son poids* ». On admet que X est une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(14\ ;\ \ 1{,}5)$.

La fonction de densité f de cette loi a comme expression :

⇨ On trace la courbe représentative de f dans le repère ci-dessous :



⇨ On calcule la probabilité de l'évènement A : « L'enfant a un poids compris entre 16 et 17 kg » :

⇨ On calcule la probabilité de l'évènement B : « L'enfant a un poids compris entre 10 et 19 kg » :

⇨ On calcule la probabilité de l'évènement C : « L'enfant a un poids compris entre $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$ » :

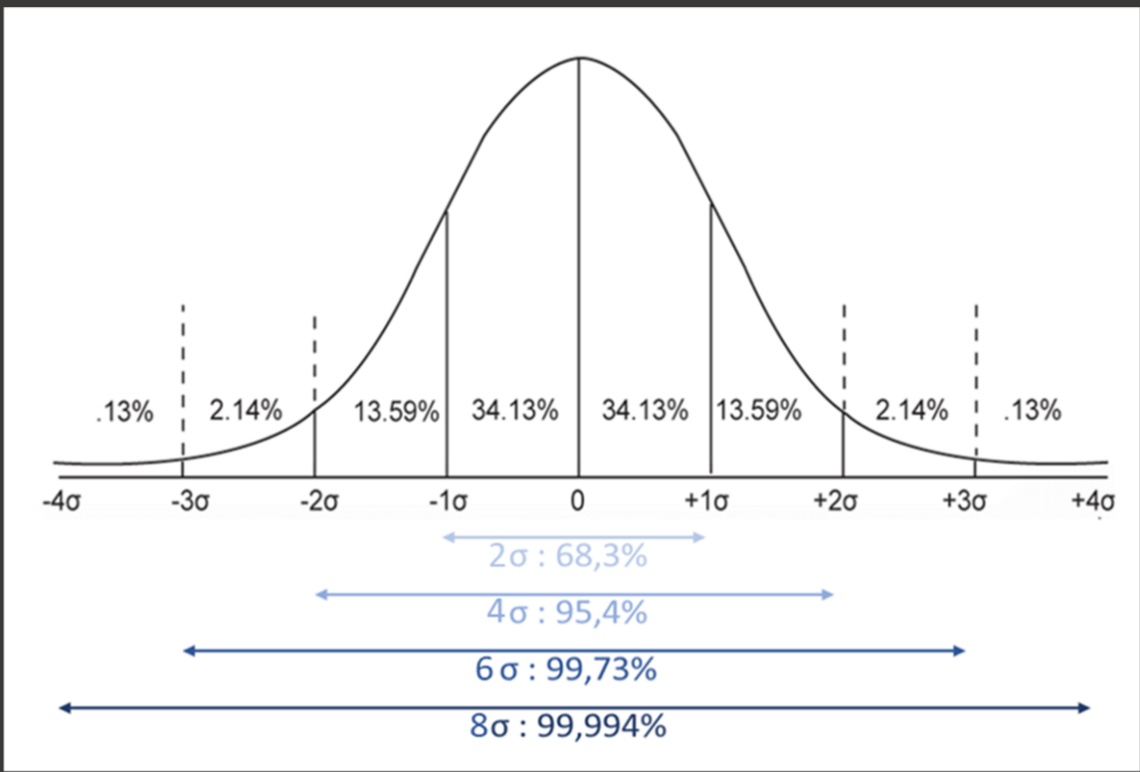
⇨ On calcule la probabilité de l'évènement D : « L'enfant a un poids compris entre $\mu - 2\sigma$ et $\mu + 2\sigma$ » :

⇨ On calcule la probabilité de l'évènement E : « L'enfant a un poids compris entre $\mu - 3\sigma$ et $\mu + 3\sigma$ » :

d. PROPRIETE :

Règle 68 – 95 – 99,7 : Soit X est une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,,\sigma)$. On constate que :

$$\mathbb{P}(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,6827$$
$$\mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$
$$\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$



e. LOI NORMALE SUR CALCULATRICE :

On retrouve sur les calculatrices lycées, des procédures qui permettent de calculer rapidement les probabilités d'une variable aléatoire qui suit une loi normale. Pas besoin de tracer la courbe de la fonction de densité, on peut obtenir un résultat beaucoup plus rapidement.

- Sur NUMWORKS : https://www.numworks.com/fr/professeurs/tutoriels/probabilites/
- Sur Casio 35 : https://www.casio-education.fr/contenus/loi-normale/
- Sur TI : https://math.univ-lyon1.fr/irem/IMG/pdf/170_ti83_Premium_CE.pdf

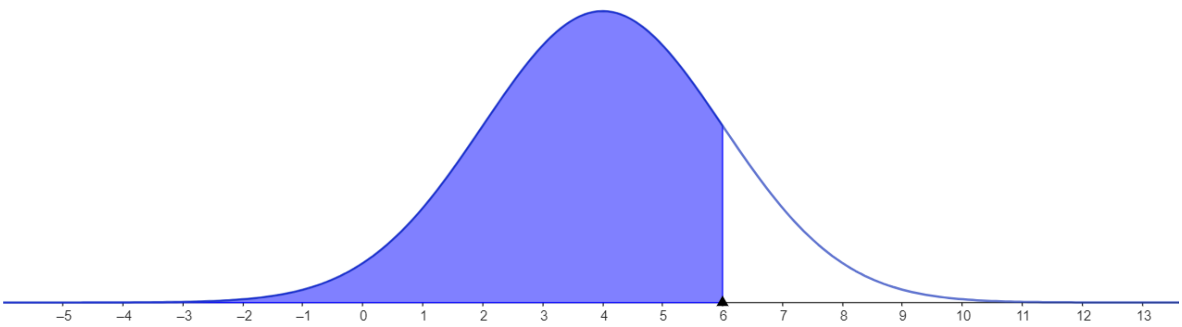
f. APPROXIMATION D'UNE LOI BINOMIALE PAR UNE LOI NORMALE :

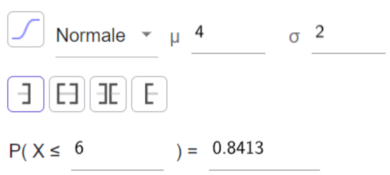
Exemple : Une entreprise fabrique en très grande série une pièce technique. Le processus de fabrication n'est pas parfait et statistiquement, on a constaté que 5% des pièces avaient un défaut.
Pour vérifier que ce pourcentage ne s'aggrave pas, on constitue quotidiennement un échantillon de 80 pièces, en sortie de production (par tirage au sort).
On travaille ici sur une loi de probabilité $\mathcal{B}(80\ ,0.05)$. La variable aléatoire X est le nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon de 80.
L'espérance est $E(X) = n\,p = 80 \times 0{,}05 = 4$ et l'écart-type est :

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{80 \times 0{,}05 \times (1 - 0{,}05)} = \sqrt{4 \times 0{,}95} \approx 1{,}95 \approx 2$$

> Propriété : Si une variable aléatoire X suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et si $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, cette loi peut être approchée par une loi Normale $\mathcal{N}(\mu\ ,\sigma)$ avec $\mu = n\,p$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

Que cela donne-t-il sur l'exemple précédent ? : On utilise une loi normale $\mathcal{N}(4\,;2)$. Cela nous permet de tracer la courbe de la fonction de densité ci-dessous et de répondre par exemple à la question suivante « Quelle est la probabilité d'avoir moins de 4 pièces défectueuses dans l'échantillon ? ».



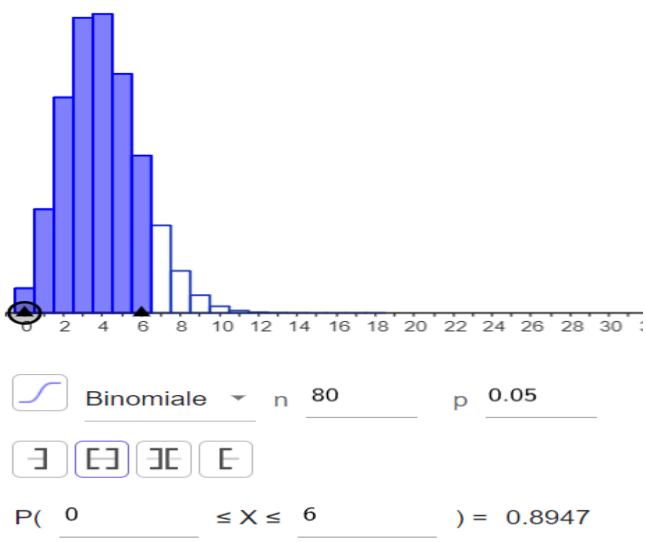


La probabilité d'avoir moins de 4 pièces défectueuses dans l'échantillon est $p(X \leq 6) \approx 0{,}84$

Ce résultat est-il proche de celui donné par la loi Binomiale $\mathcal{B}(80\ ,0.05)$:

L'histogramme des probabilités est donné ci-contre. Avec une loi Binomiale, cette même probabilité est :

$$p(X \leq 6) \approx 0{,}84$$



Application : **Woburn** est une petite ville du Massachusetts, au Nord-Est des Etats-Unis. Du milieu à la fin des années 1970, la communauté locale s'émeut d'un grand nombre de leucémies infantiles survenant dans certains quartiers de la ville. Les familles se lancent alors dans l'exploration des causes et constatent la présence de décharges et de friches industrielles ainsi que l'existence de polluants. Dans un premier temps, les experts gouvernementaux concluent qu'il n'y a rien d'étrange. Mais les familles s'obstinent et saisissent leurs propres experts. Une étude statistique montre qu'il se passe sans doute quelque chose d'étrange. Le tableau suivant résume les données statistiques concernant les enfants de Woburn de moins de 15 ans, pour la période 1969-1979 (*Sources : Massachusetts Department of public Health et Havard University*).

Nombre d'enfants de 0 à 14 ans résidant dans la ville de Woburn	Nombre de cas de leucémies infantile observés à Woburn entre 1969 et 1970	Fréquence des leucémies aux Etats-Unis
11748	**12**	**0.00045**

La question statistique qui se pose est de savoir si le hasard seul peut raisonnablement expliquer les fréquences observées à Woburn ? La population des Etats-Unis étant très grande, on peut considérer que l'échantillon correspondant à la population de Woburn résulte d'un tirage avec remise.

On considère ainsi l'expérience aléatoire suivante : « On tire au sort dans la population des Etats-Unis un enfant âgé de 0 à 14 ans » Cette expérience a 2 issues : S= « l'enfant est atteint de leucémie » ou $\bar{S}$= « l'enfant n'est pas atteint de leucémie ». On a $p(S) = 0.00045$. On répète cette expérience $n = 11748$ fois. Soit X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'enfant atteint de leucémie dans ces n expériences. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

1- Calculer la probabilité $p(X \geq 12)$ en utilisant la loi binomiale.

2- Calculer la probabilité $p(X \geq 12)$ en utilisant une approximation avec la loi normale. Tracer la courbe de la fonction de densité. Le nombre de cas de leucémies infantile observés à Woburn entre 1969 et 1970 est-il vraiment anormal ?

3- Loi exponentielle :

Cette loi est souvent utilisée pour prévoir la durée de vie de certains produits « » ou très peu. C'est le cas souvent de la partie électronique de nombreux matériels. On peut prendre l'exemple d'un ordinateur. Si on en change, c'est très souvent parce qu'il devient obsolète ou qu'une avarie de type mécanique s'est produite : touches cassées, charnière de l'écran abimée, ventilateur du CPU défectueux. …. Dans la grande majorité des cas, le processeur, la mémoire fonctionnent encore correctement.
Les mathématiciens ont mis en place des techniques adaptées à ce type de situation pour lesquelles on essaie de prévoir la durée de vie de produits « qui ne vieillissent pas ». Ce sont les techniques de la loi exponentielle.

a. Sur quel principe les mathematiciens se sont bases pour batir cette loi exponentielle ? :

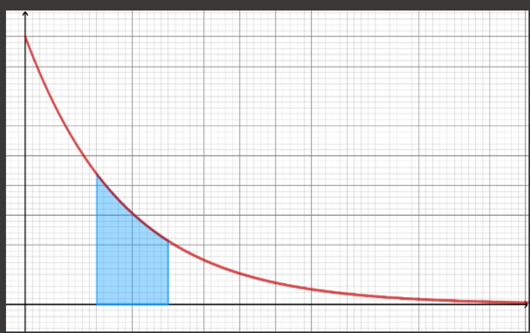
Le principe de base est que la probabilité qu'un produit de ce type tombe en panne est indépendante de son âge. Ainsi, un processeur qui a déjà fonctionné 10 ans aura la même probabilité de tomber en panne qu'un processeur neuf. Ce concept peut paraître surprenant au premier abord. On préfèrera toujours acheter neuf, plutôt que d'occasion. Mais si on parle de processeur par exemple, ou d'ampoules à leds, cela fonctionne assez bien. Neuf, le risque d'une panne liée à une mauvaise fabrication par exemple est prépondérant. Lorsqu'il a vécu, ce risque est moins important. D'autre part, le vieillissement est très léger. Globalement, cela fonctionne

b. Mathematiquement, cela donne quoi ? :

On est bien dans une situation de probabilité. On tire au sort un produit « qui ne vieillit pas », on cherche à calculer la probabilité que sa durée de vie soit inférieure à 1 an ou soit supérieure à 2 ans, ou, etc ….
La première chose à faire est de créer une variable aléatoire T qui sera ici la durée de vie de ce produit. Ainsi T sera un nombre réel, bien sûr positif, car c'est une durée, qui pourra prendre n'importe quelle valeur réelle, entre 0 et l'infini.

La probabilité qu'un produit ait une durée de vie comprise entre deux temps quelconques a et b est notée : $p(a < T < b)$. Si on part du principe que cette durée de vie $p(a < T < b)$ est INDEPENDANTE de son âge, on arrive à montrer que

Propriété : T suit une loi de densité dont la fonction de densité a comme expression $f(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}$ définie par pour $t \in [0\,;\,+\infty[$.
λ est un nombre réel appelé « paramètre de la loi exponentielle ». Si les durées de vie sont importantes, ce nombre λ sera petit, sinon, il sera plus grand.



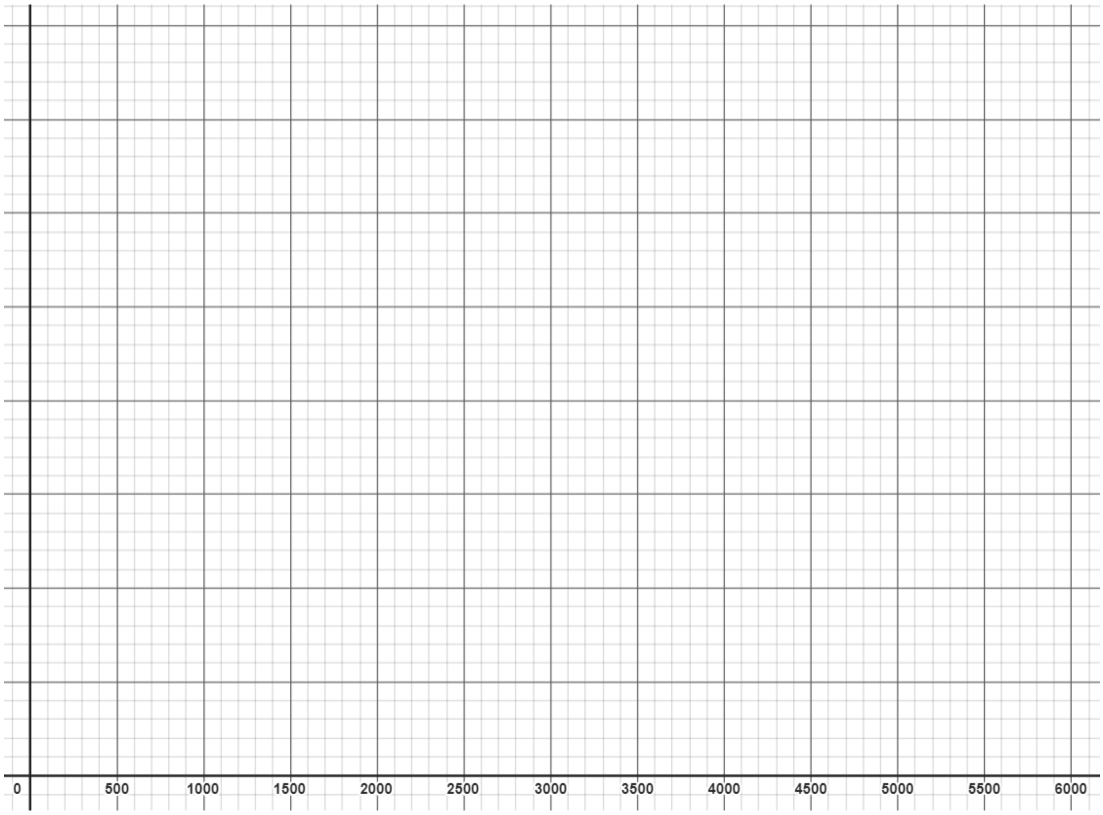
La courbe représentative de f est donnée ci-dessus.

C. EXEMPLE :

T est la variable aléatoire qui, à toute ampoule d'un certain type prélevée au hasard dans un stock important, associe sa durée de bon fonctionnement en heures. On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0004$

1. Définir la fonction de densité f de cette loi.

2. Soit C_f la représentation graphique de f. En vous aidant de votre calculatrice, tracer C_f ci-dessous :



Soit les évènements suivants :

A : « la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevée est comprise entre 500 h et 2000 h »,

B : « la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevée est supérieure à 3000 h »,

3. Calculer la probabilité $p(A)$ en utilisant la procédure calcul intégral sur la calculatrice

4. Calculer la probabilité $p(B)$ utilisant à présent une primitive de f

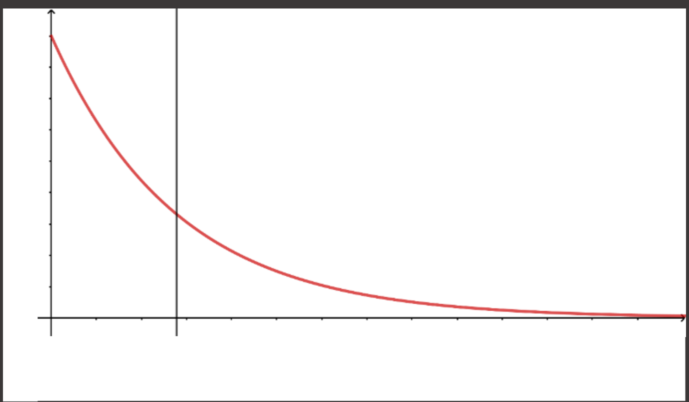
d. L'AIRE SOUS LA COURBE EST-ELLE EGALE A 1 ? :

On peut vérifier que la probabilité $\int_0^{+\infty} f(t).dt = 1$:

e. PROPRIETE :

Propriétés : Si T suit une loi de densité exponentielle de paramètre λ,
l'espérance $E(T)$ est égale à l'inverse de λ :

L'allure de la courbe représentative de la fonction de densité peut être tracée sans calculatrice en utilisant les indications données ci-contre :



f. En utilisant cette loi, la probabilite d'avoir une certaine duree de vie est-elle vraiment independante de l'age ? :

On peut répondre à cette question en reprenant l'exercice précédent sur l'ampoule dont la durée de vie suivait une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0004$.

On se propose de calculer la probabilité $p(X > 100)$ que la durée de vie de l'ampoule soit supérieure à $100\ h$ et ensuite celle $p_{X>500}(X > 600)$ que la durée de vie soit supérieure à $600\ h$ sachant qu'elle a déjà fonctionné $500\ h$